

コンピュータグラフィックス

第5回

CGのための数学的基礎2

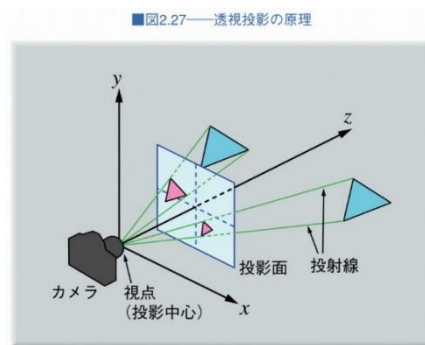
～投影変換～

理工学部 兼任講師
藤堂 英樹

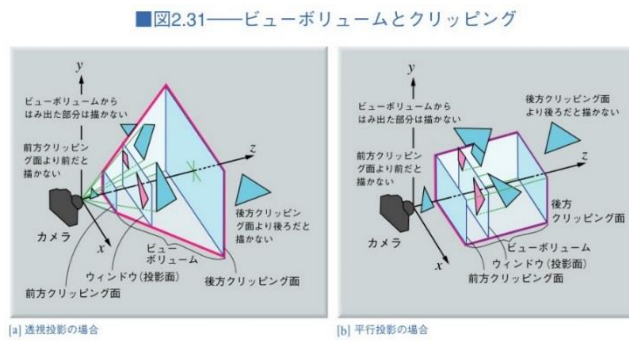
本日の講義内容

■CGのための数学的基礎2

- 投影
- ビューイングパイプライン



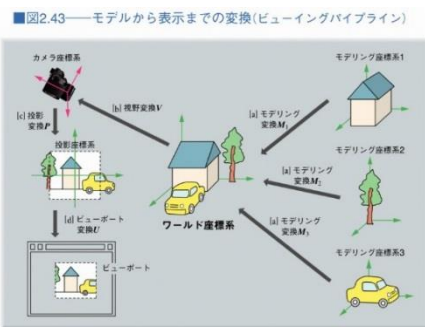
【コンピュータグラフィックス】2004年 / 財団法人画像情報教育振興協会 (CG-ARTS協会)



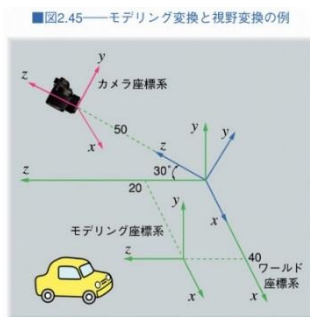
[a] 透視投影の場合

[b] 平行投影の場合

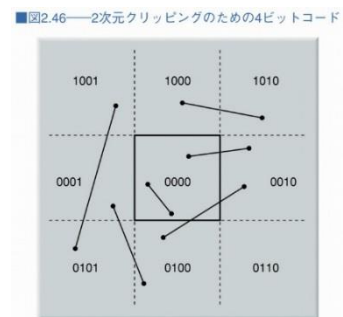
【コンピュータグラフィックス】2004年 / 財団法人画像情報教育振興協会 (CG-ARTS協会)



【コンピュータグラフィックス】2004年 / 財団法人画像情報教育振興協会 (CG-ARTS協会)



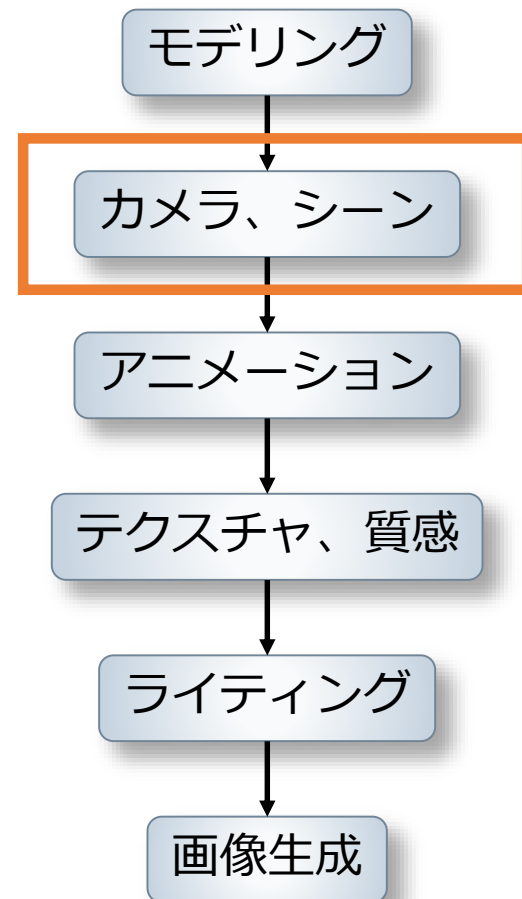
【コンピュータグラフィックス】2004年 / 財団法人画像情報教育振興協会 (CG-ARTS協会)



【コンピュータグラフィックス】2004年 / 財団法人画像情報教育振興協会 (CG-ARTS協会)

CG制作の主なワークフロー

■3DCGソフトウェアの場合



投影変換関連

■実写の撮影とも関連が深い

- 標準, 広角, 望遠レンズの選択
- 焦点距離の調整

■カメラの設定

- 視点変更, ズームアップ (主に座標変換)
- 投影手法の設定, 画角の調整

実写の撮影

■ 広角(35mm)

- 風景

■ 標準(50mm)

- 室内
- 記念写真

<http://cweb.canon.jp/cpc/starteos/07-01.html>

■ 望遠(100mm)

- ポートレート
- スポーツ

被写体と焦点距離
© キヤノン

投影変換関連

■実写の撮影とも関連が深い

- 標準, 広角, 望遠レンズの選択
- 焦点距離の調整

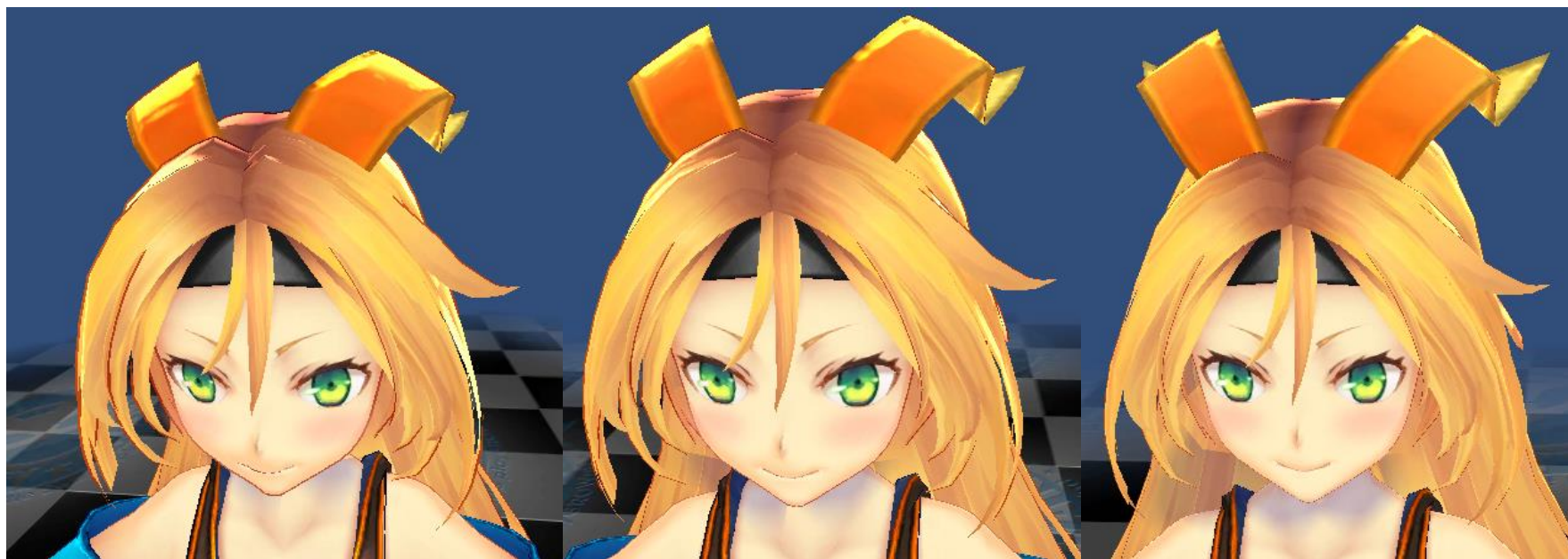
■カメラの設定

- 視点変更, ズームアップ (主に座標変換)
- 投影手法の設定, 画角の調整

CG側でもやってみましょう!

CGでのカメラ設定

■ 広角, 標準, 望遠による見え方の違い



30mm: 画角62°
(広角)

50mm: 画角40°
(標準)

100mm: 画角20°
(望遠)

CGでのカメラ設定

■ 広角, 標準, 望遠による見え方の違い



30mm: 画角62°
(広角)

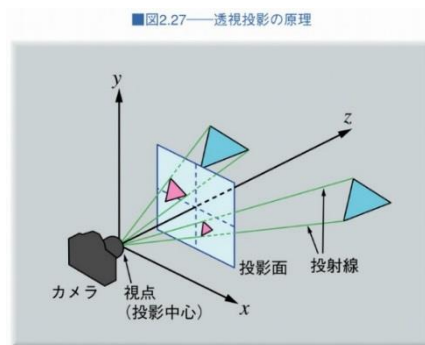
50mm: 画角40°
(標準)

100mm: 画角20°
(望遠)

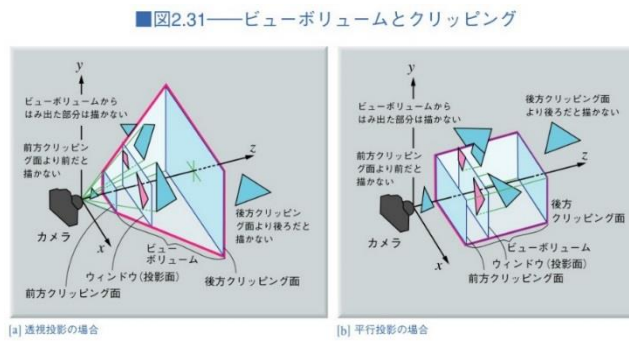
本日の講義内容

■CGのための数学的基礎2

- 投影
- ビューイングパイプライン



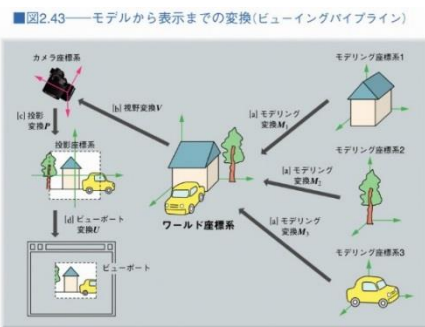
「コンピュータグラフィックス」2004年 / 財団法人画像情報教育振興協会 (CG-ARTS協会)



[a] 透視投影の場合

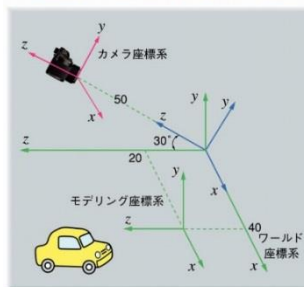
[b] 平行投影の場合

「コンピュータグラフィックス」2004年 / 財団法人画像情報教育振興協会 (CG-ARTS協会)



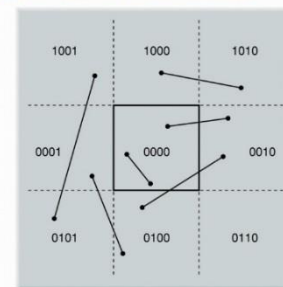
「コンピュータグラフィックス」2004年 / 財団法人画像情報教育振興協会 (CG-ARTS協会)

■図2.45—モデリング変換と視野変換の例



「コンピュータグラフィックス」2004年 / 財団法人画像情報教育振興協会 (CG-ARTS協会)

■図2.46—2次元クリッピングのための4ビットコード



「コンピュータグラフィックス」2004年 / 財団法人画像情報教育振興協会 (CG-ARTS協会)

投影の原理

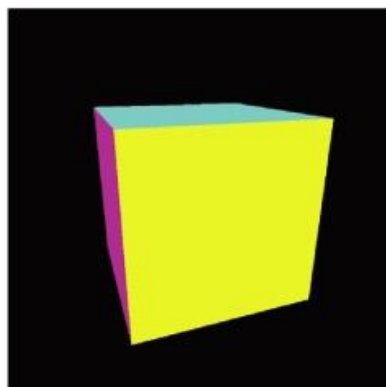
■ 透視投影

- 遠近感の強調

■ 平行投影

- 見る位置で大きさが変わらない

■ 図2.26——透視投影と平行投影の比較



[a] 透視投影による立方体の表示



[b] 平行投影による立方体の表示



[c] 透視投影による平行なポリゴンの表示



[d] 平行投影による平行なポリゴンの表示

透視投影

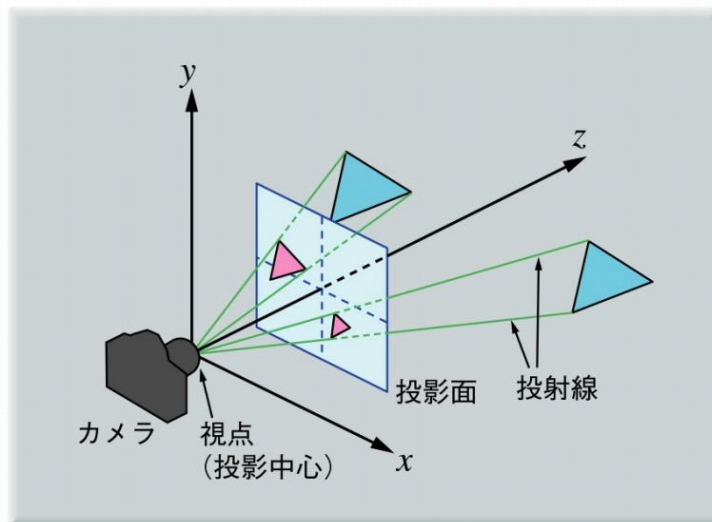
■ 投影中心

- 視点, カメラの位置

■ 投影面

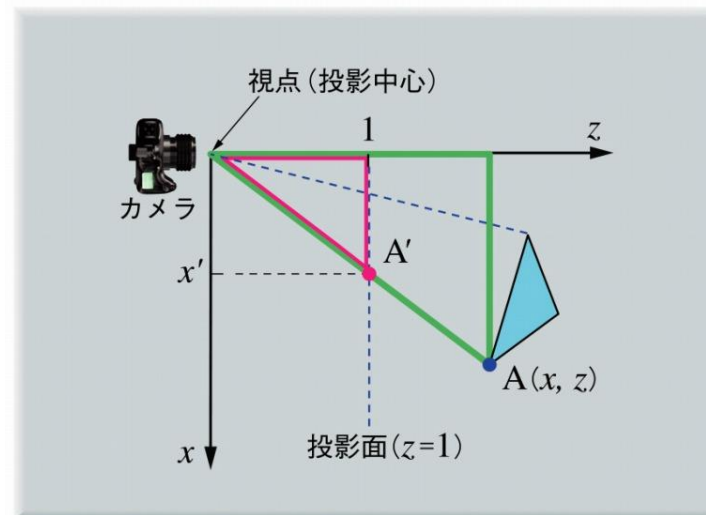
- 図形を投影するための面

■ 図2.27——透視投影の原理



「コンピュータグラフィックス」2004年 / 財団法人画像情報教育振興協会 (CG-ARTS協会)

■ 図2.28——透視投影の計算



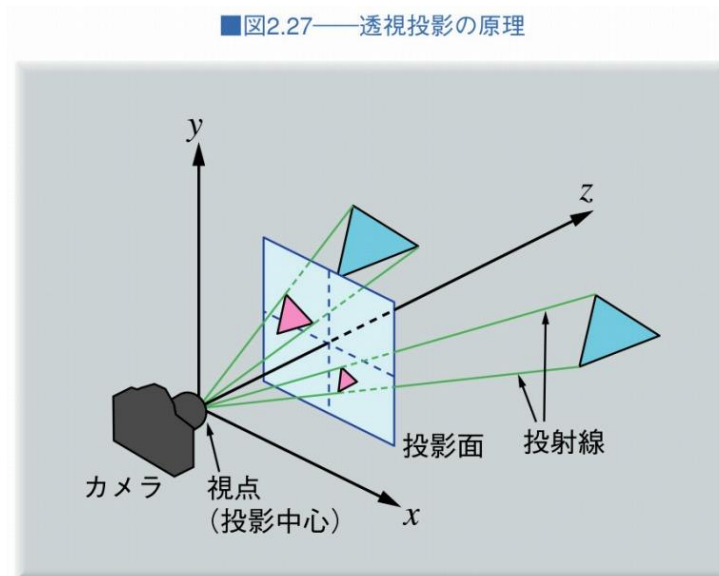
「コンピュータグラフィックス」2004年 / 財団法人画像情報教育振興協会 (CG-ARTS協会)

透視投影

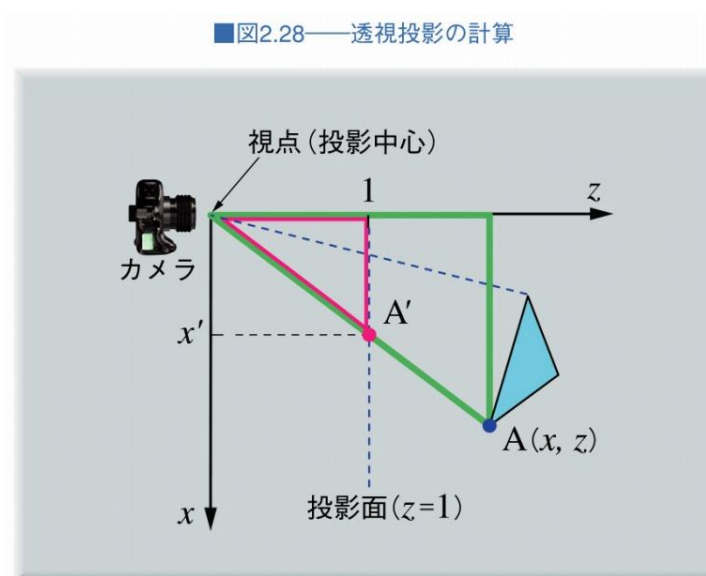
■例：A(x, y, z)を投影面 (z = 1)に投影

- $x' = \frac{x}{z}$
- $y' = \frac{y}{z}$

遠くのもの小さく描かれる



「コンピュータグラフィックス」2004年 / 財団法人画像情報教育振興協会 (CG-ARTS協会)



「コンピュータグラフィックス」2004年 / 財団法人画像情報教育振興協会 (CG-ARTS協会)

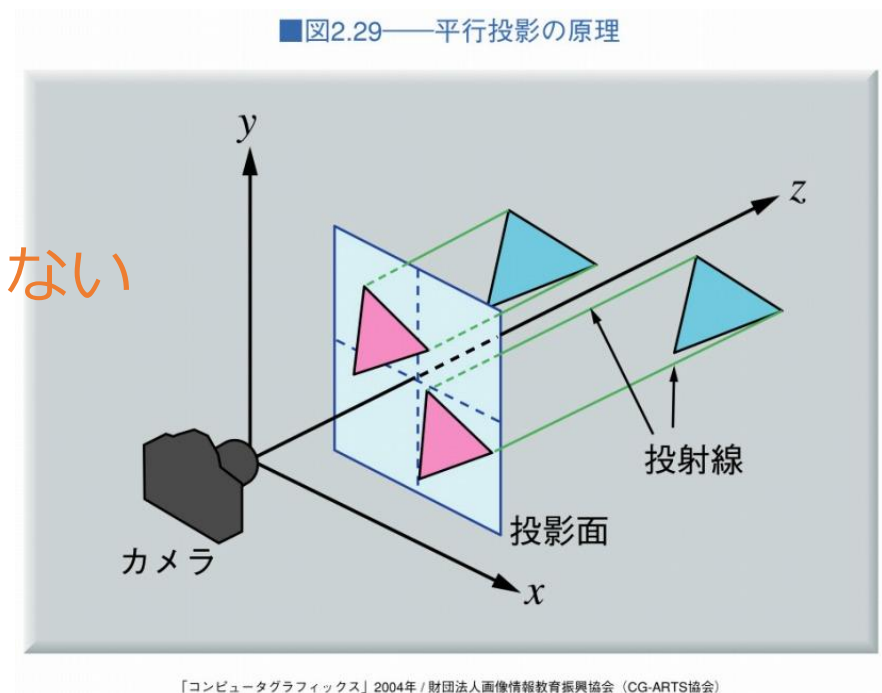
平行投影

■ 投影線が平行

■ 例： $A(x, y, z)$ を投影面 ($z = 1$)に投影

- $x' = x$
- $y' = y$

見る位置で大きさが変わらない



各投影手法の用途

■透視投影

- 映像を写實的, リアルにする目的
- 映画やゲーム

■平行投影

- ものの形を正確に把握する目的
- 設計製図やグラフの描画

ビューボリュームと投影

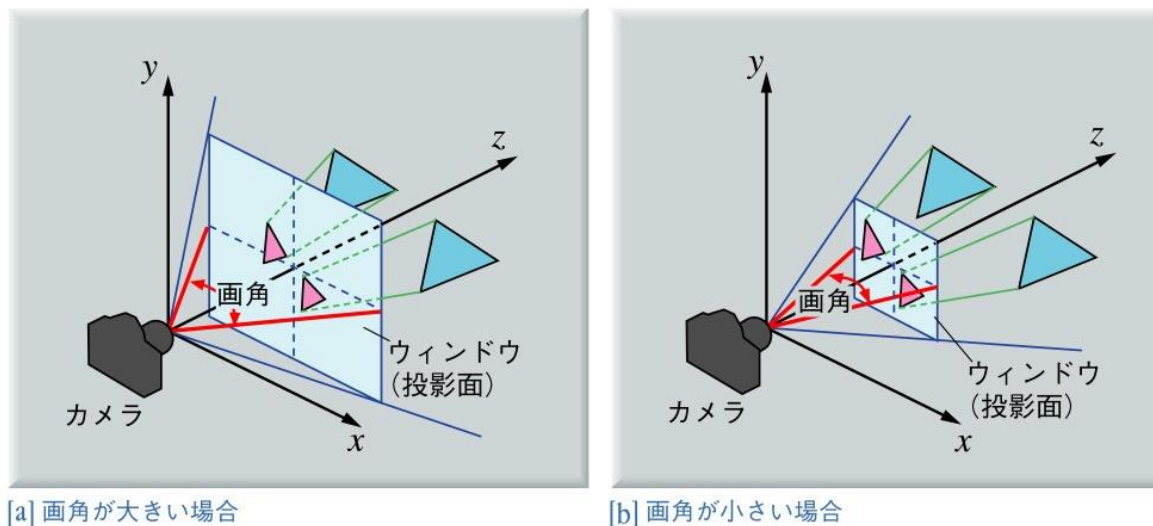
■ ウィンドウ

- 投影面上の投影範囲

■ 画角(視野角)

- ウィンドウ(投影範囲)の大きさを決める角度

■ 図2.30——透視投影における画角の効果



「コンピュータグラフィックス」2004年 / 財団法人画像情報教育振興協会 (CG-ARTS協会)

ビューボリュームとクリッピング

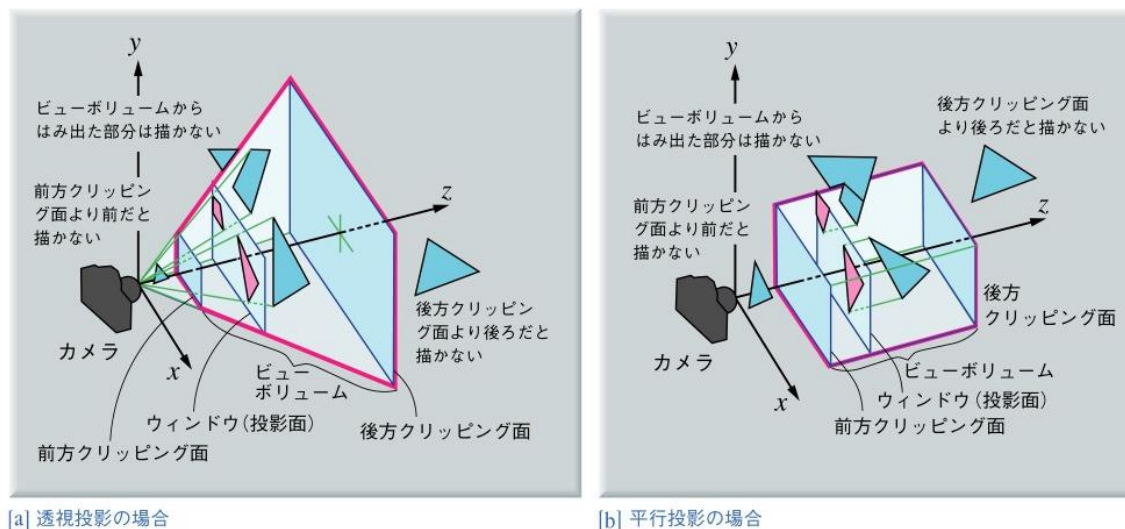
■ビューボリューム

- 画面に映し出す 3 次元空間の範囲

■クリッピング

- ビューボリューム外の図形を削除する処理

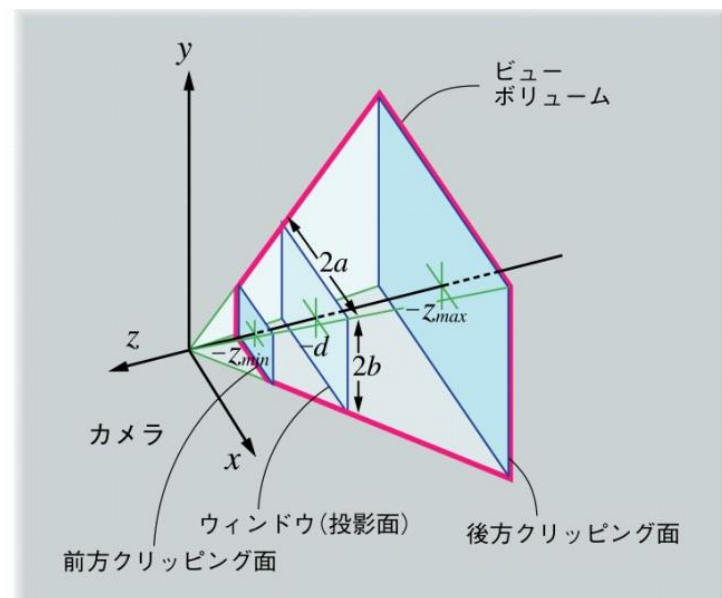
■図2.31—ビューボリュームとクリッピング



「コンピュータグラフィックス」2004年 / 財団法人画像情報教育振興協会 (CG-ARTS協会)

透視投影のビューボリューム位置

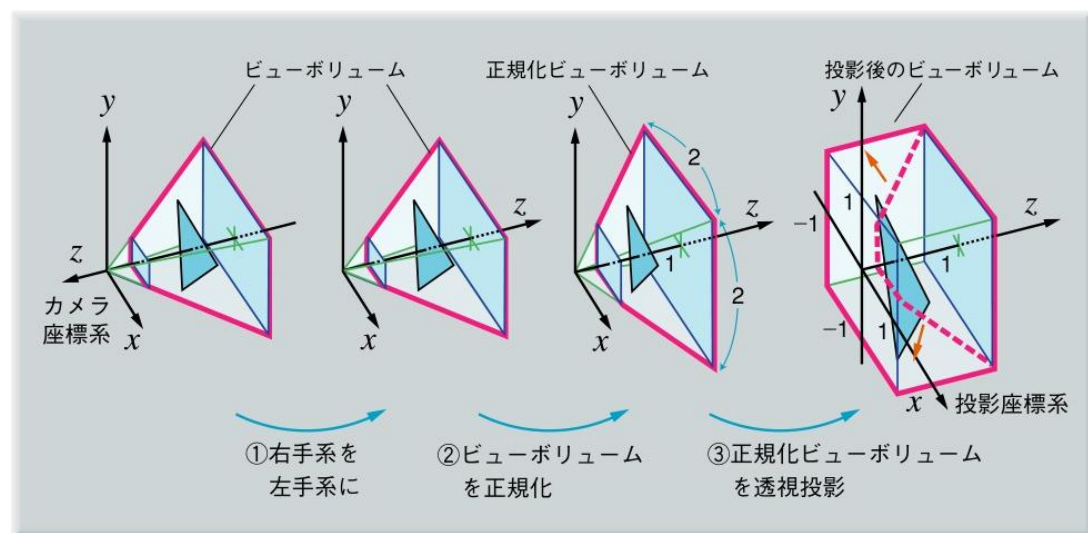
- 視点が原点
- d : 視点からウィンドウまでの距離
- $(2a, 2b)$: ウィンドウの大きさ
- (z_{min}, z_{max}) : クリッピング範囲



透視投影の計算過程

- 右手系⇒左手系
- ビューボリュームを正規化
- 正規化ボリュームを透視投影

■ 図2.33——透視投影の計算過程



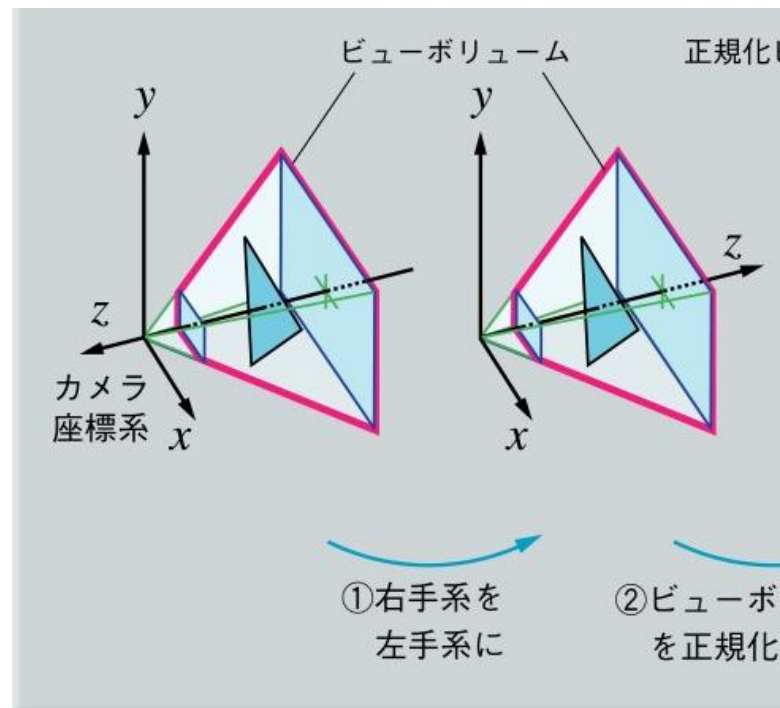
「コンピュータグラフィックス」2004年 / 財団法人画像情報教育振興協会 (CG-ARTS協会)

透視投影の計算過程

■ 右手系⇒左手系

- z値を-1倍すれば良い

- $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{S}(1,1,-1) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$



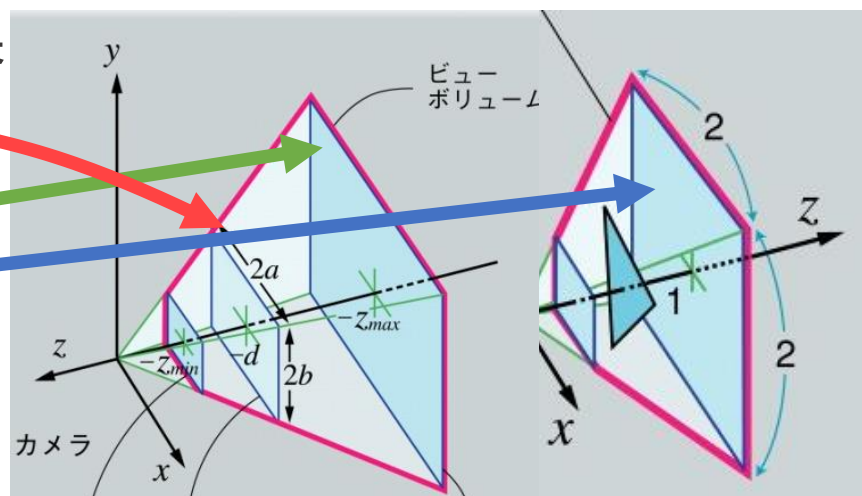
透視投影の計算過程

■ビューボリュームを正規化

- $z_{max} \Rightarrow 1$
- $z_{max} = 1$ でのビューボリュームが正方形
 - $-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$

■ビューボリュームの変換

- (a, b, d)
 $\Rightarrow \left(\frac{az_{max}}{d}, \frac{bz_{max}}{d}, z_{max} \right)$
 $\Rightarrow (1, 1, 1)$
- $S \left(\frac{d}{az_{max}}, \frac{d}{bz_{max}}, \frac{1}{z_{max}} \right)$



正規化前

正規化後

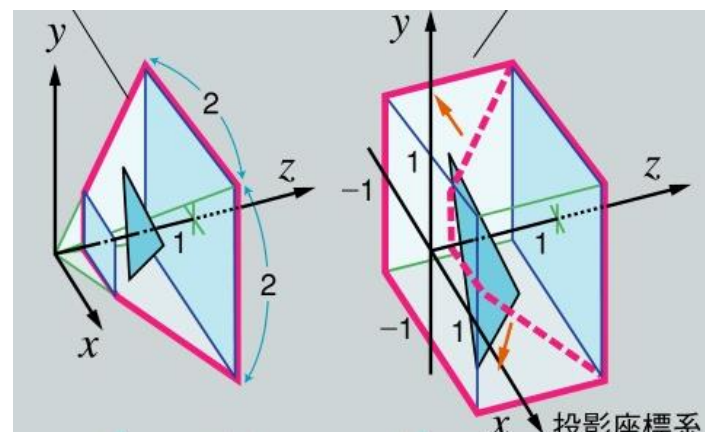
透視投影の計算過程

■正規化ボリュームを透視投影

- $\tilde{z}_{min} = \frac{z_{min}}{z_{max}}$

- $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1-\tilde{z}_{min}} & -\frac{\tilde{z}_{min}}{1-\tilde{z}_{min}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= P(\tilde{z}_{min}) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$



投影前

投影後

射影変換

■ 透視投影変換 $P(\tilde{z}_{min})$ はアフィン変換ではない

- 最下行が $0,0,0,1$ ではない

■ 3次元射影変換

- $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$$

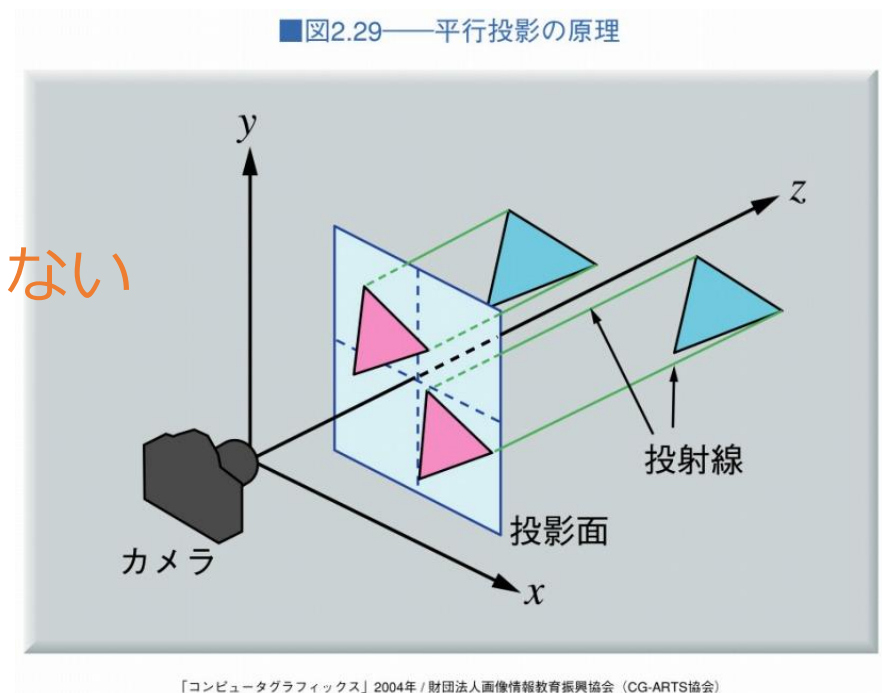
平行投影

■ 投影線が平行

■ 例： $A(x, y, z)$ を投影面 ($z = 1$)に投影

- $x' = x$
- $y' = y$

見る位置で大きさが変わらない



平行投影の計算過程

■ビューボリユームの正規化

- $x_{min} \leq x \leq x_{max}, y_{min} \leq y \leq y_{max}$
 $\Rightarrow -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$
- $z_{max} \Rightarrow 1, z_{min} \Rightarrow 0$

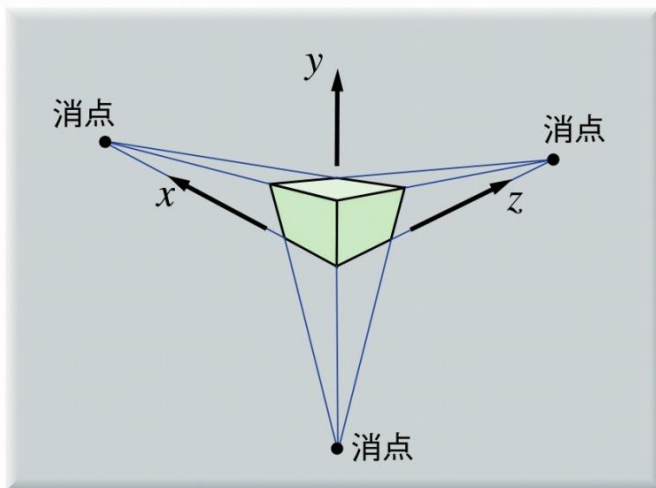
- $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{x_{max}-x_{min}} & 0 & 0 & -\frac{x_{max}+x_{min}}{x_{max}-x_{min}} \\ 0 & \frac{2}{y_{max}-y_{min}} & 0 & -\frac{y_{max}+y_{min}}{y_{max}-y_{min}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{z_{max}-z_{min}} & -\frac{z_{min}}{z_{max}-z_{min}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

投影のさまざまな性質

■ 消失点とn点透視

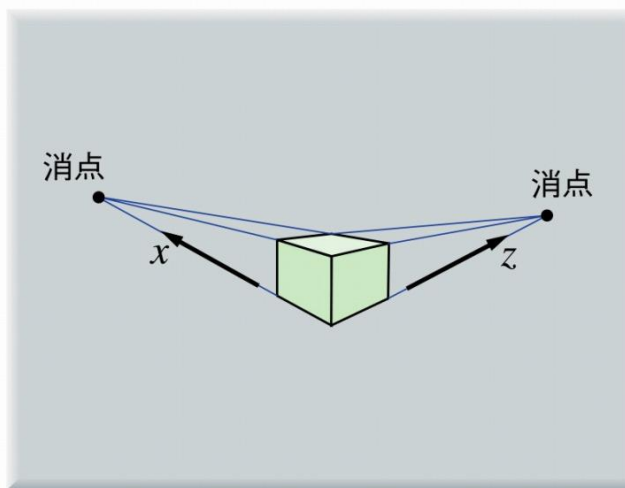
- 3点透視
- 2点透視
- 1点透視

■ 図2.37 — 3点透視



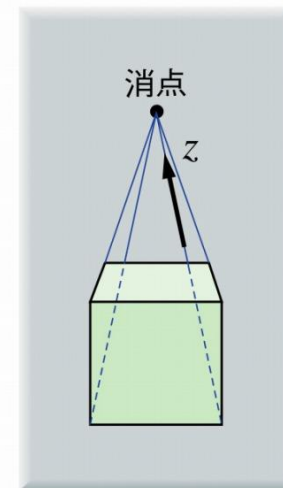
「コンピュータグラフィックス」2004年 / 財団法人画像情報教育振興協会 (CG-ARTS協会)

■ 図2.38 — 2点透視



「コンピュータグラフィックス」2004年 / 財団法人画像情報教育振興協会 (CG-ARTS協会)

■ 図2.39 — 1点透視

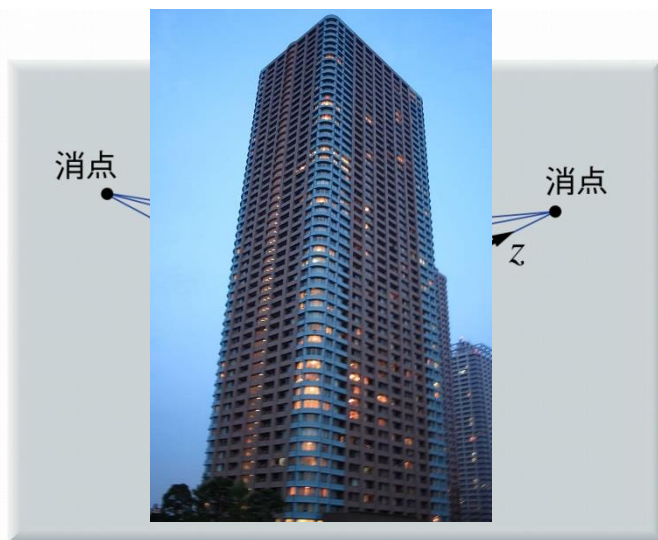


「コンピュータグラフィックス」2004年 / 財団法人画像情報教育振興協会 (CG-ARTS協会)

投影のさまざまな性質

■消失点とn点透視

- 3点透視：ビルを下から眺める
- 2点透視：建物を横から眺める
- 1点透視：教室の廊下



「コンピュータグラフィックス」2004年 / 財団法人画像情報教育振興協会 (CG-ARTS協会)



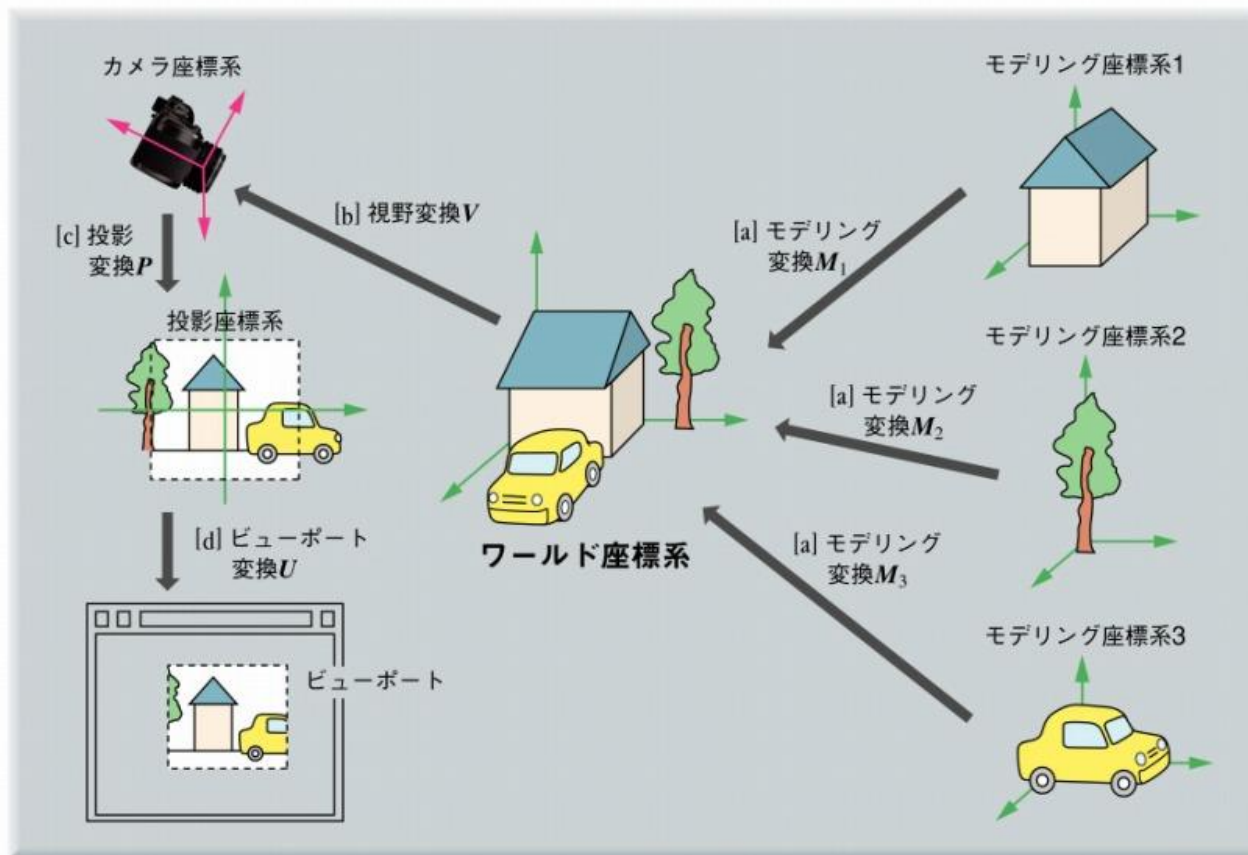
「コンピュータグラフィックス」2004年 / 財団法人画像情報教育振興協会 (CG-ARTS協会)



「コンピュータグラフィックス」2004年 / 財団法人画像情報教育振興協会 (CG-ARTS協会)

ビューイングパイプライン

■ 図2.43——モデルから表示までの変換(ビューイングパイプライン)



「コンピュータグラフィックス」2004年 / 財団法人画像情報教育振興協会 (CG-ARTS協会)

モデリング変換と視野変換

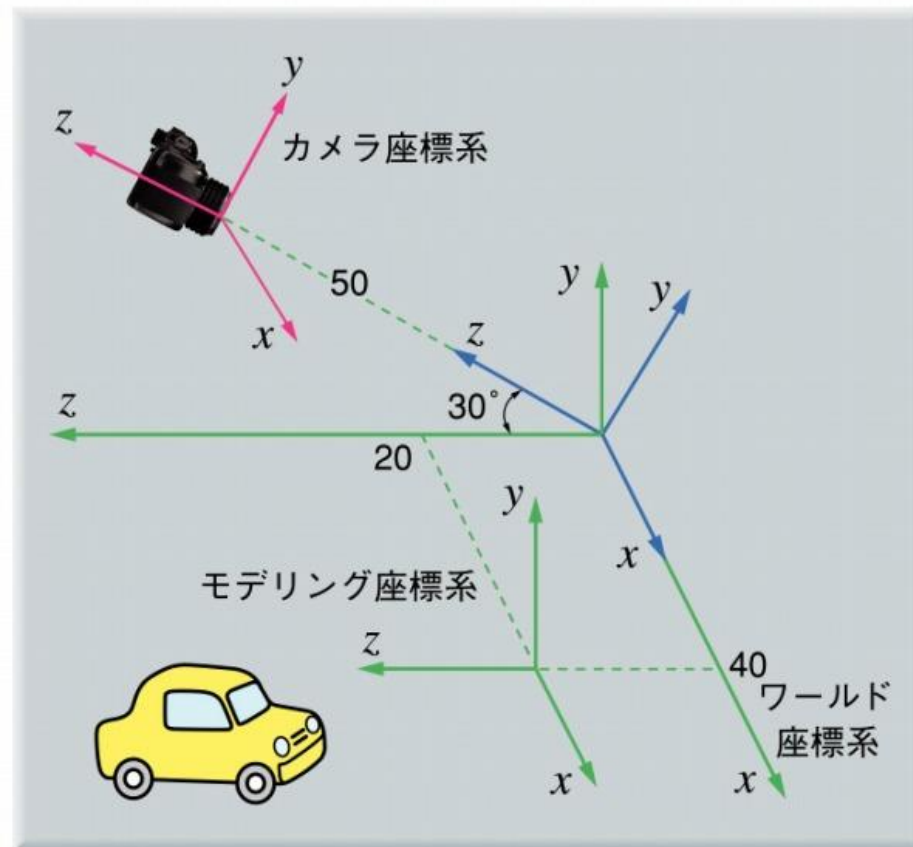
■モデリング変換

- モデリング座標系
⇒ワールド座標系

■視野変換

- ワールド座標系
⇒カメラ座標系

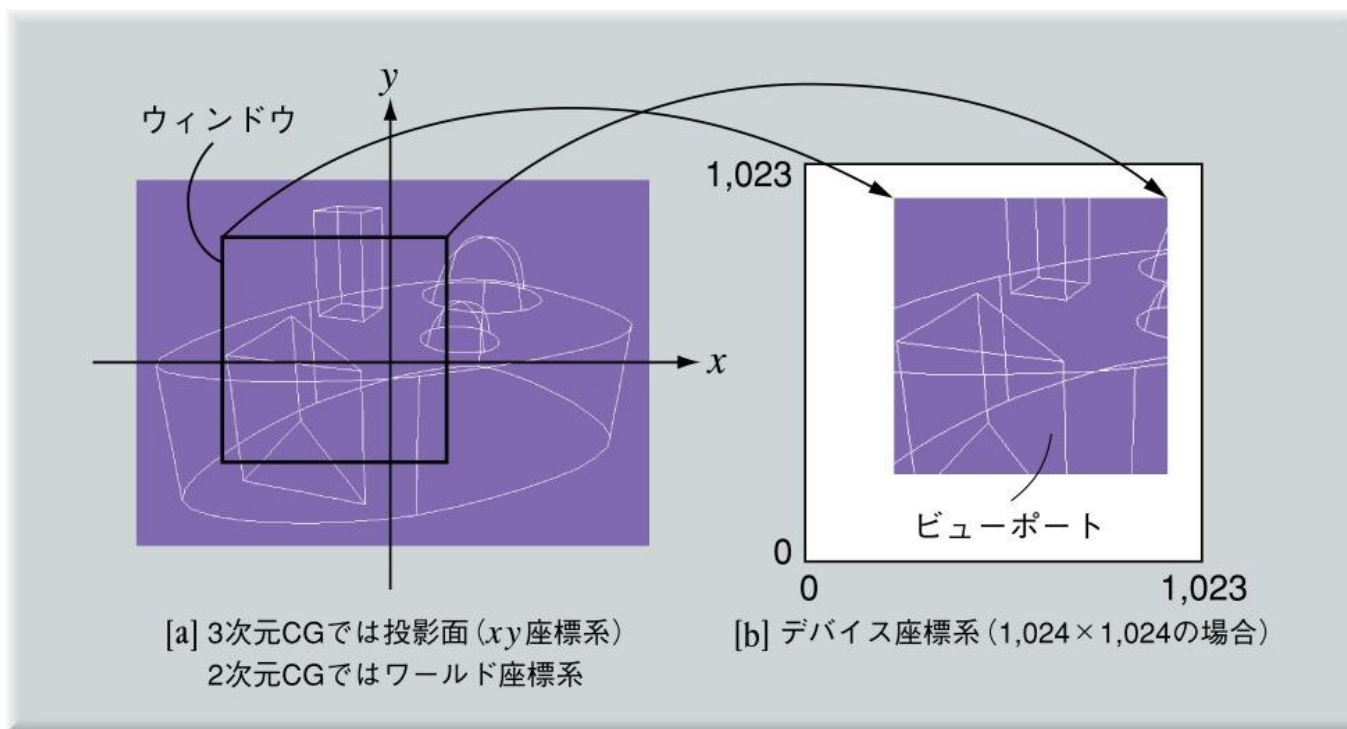
■図2.45——モデリング変換と視野変換の例



「コンピュータグラフィックス」2004年 / 財団法人画像情報教育振興協会 (CG-ARTS協会)

ビューポート変換

■ 図2.44——ビューポート変換



「コンピュータグラフィックス」2004年 / 財団法人画像情報教育振興協会 (CG-ARTS協会)

ビューボリュームとクリッピング

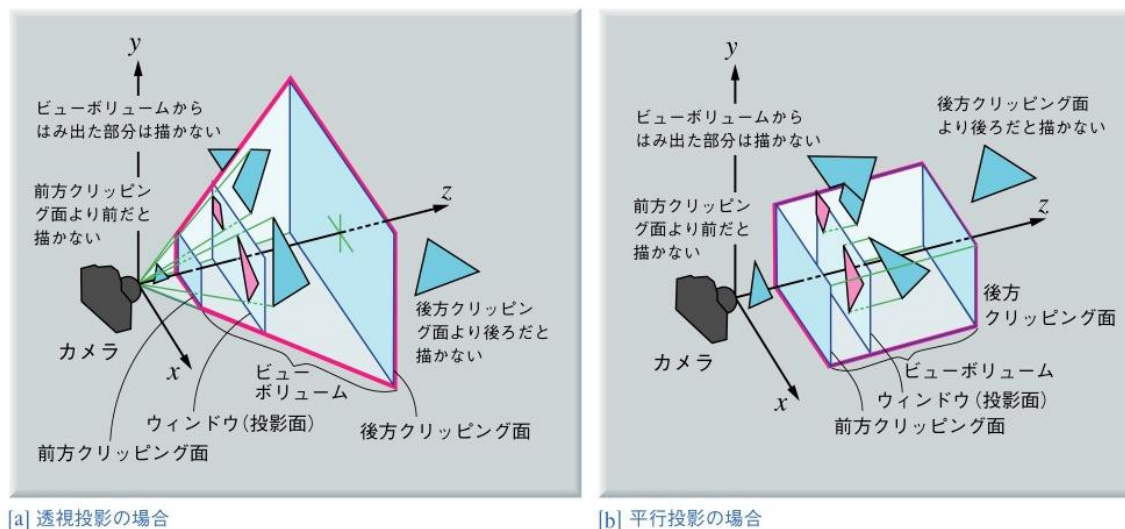
■ビューボリューム

- 画面に映し出す 3次元空間の範囲

■クリッピング

- ビューボリューム外の図形を削除する処理

■図2.31—ビューボリュームとクリッピング



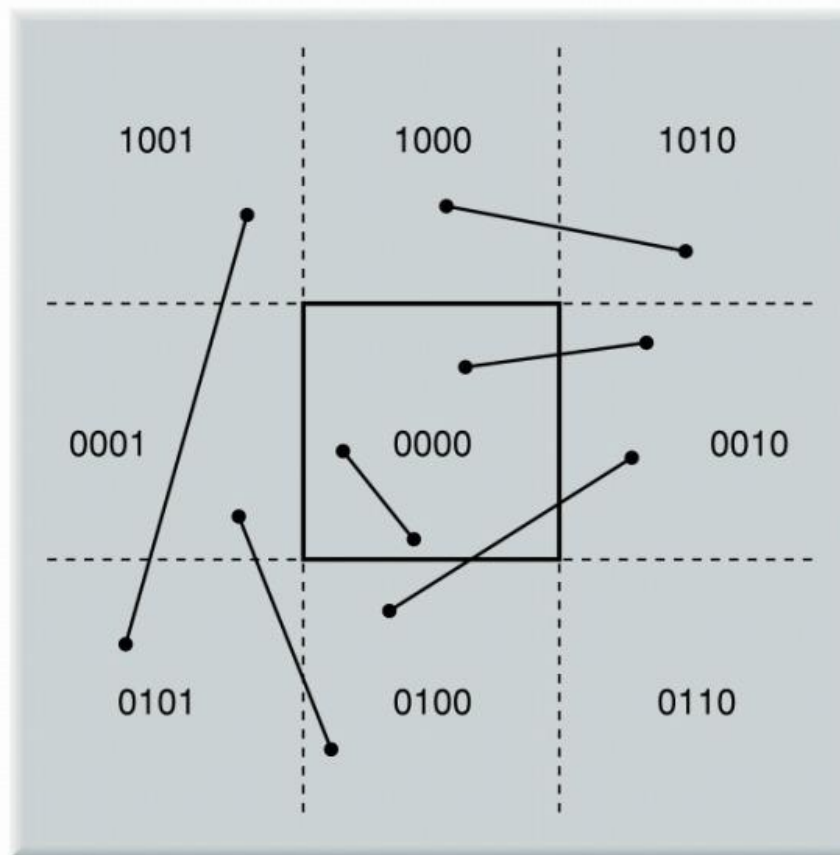
「コンピュータグラフィックス」2004年 / 財団法人画像情報教育振興協会 (CG-ARTS協会)

2次元クリッピング

■線分の可視判定を4bitコードで管理

- 第1bit : $y > y_{max}$
- 第2bit : $y < y_{min}$
- 第3bit : $x > x_{max}$
- 第4bit : $x < x_{min}$

■図2.46——2次元クリッピングのための4ビットコード



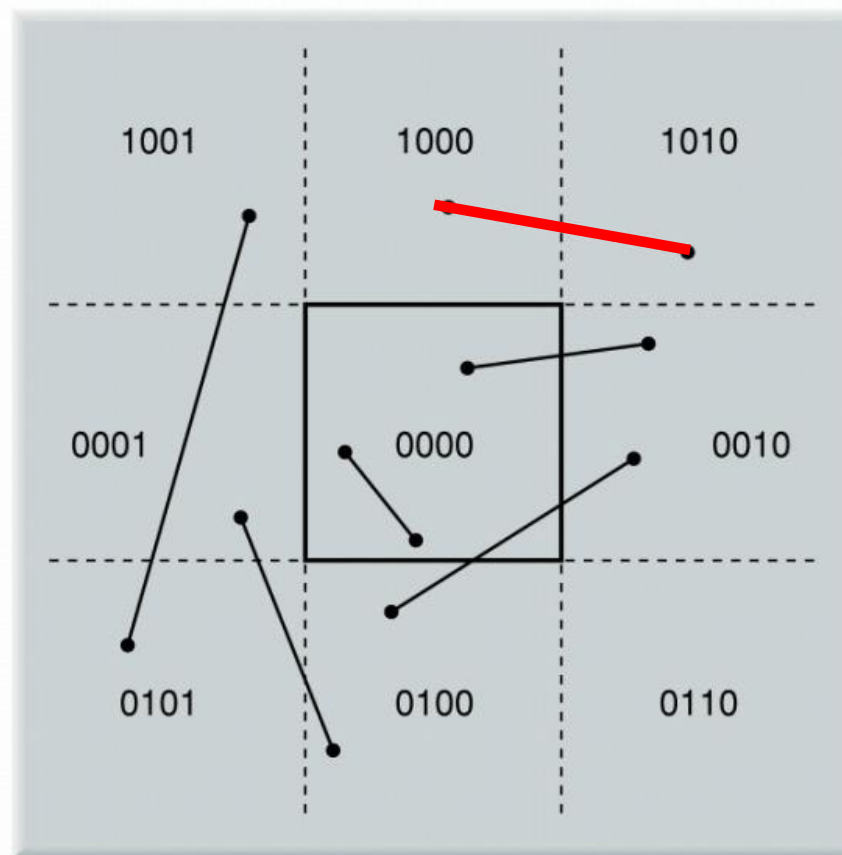
「コンピュータグラフィックス」2004年 / 財団法人画像情報教育振興協会 (CG-ARTS協会)

2次元クリッピング

■線分の可視判定手順

- 両端の論理積が1
⇒表示されない

■図2.46——2次元クリッピングのための4ビットコード



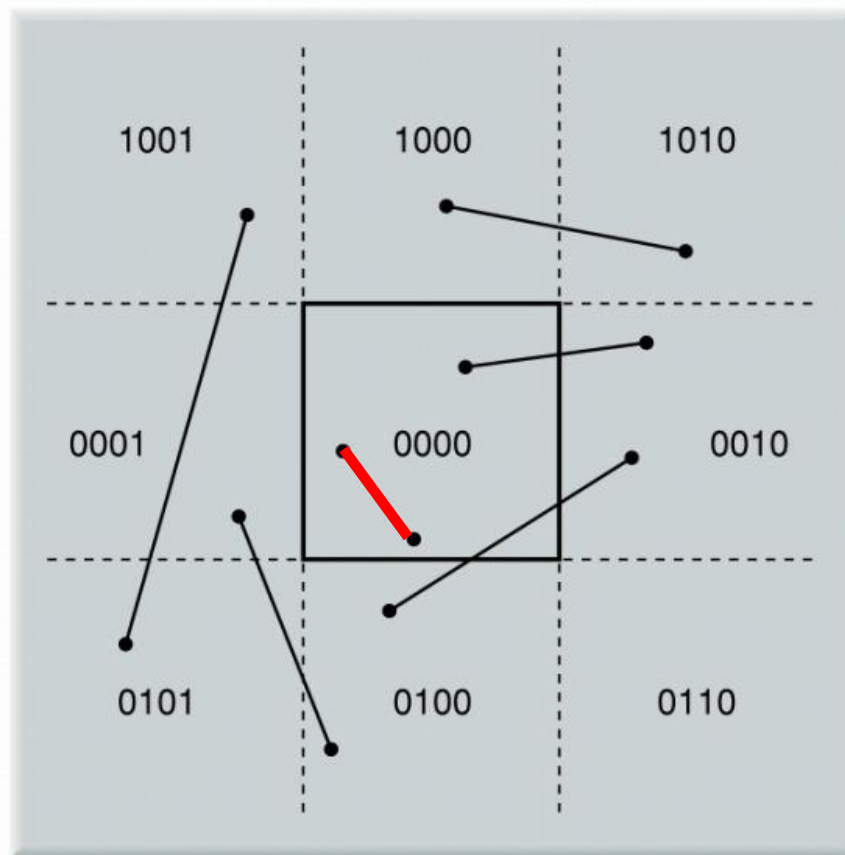
「コンピュータグラフィックス」2004年 / 財団法人画像情報教育振興協会 (CG-ARTS協会)

2次元クリッピング

■線分の可視判定手順

- 両端の論理積が1
⇒表示されない
- 両端のbitが0000
⇒表示される

■図2.46——2次元クリッピングのための4ビットコード



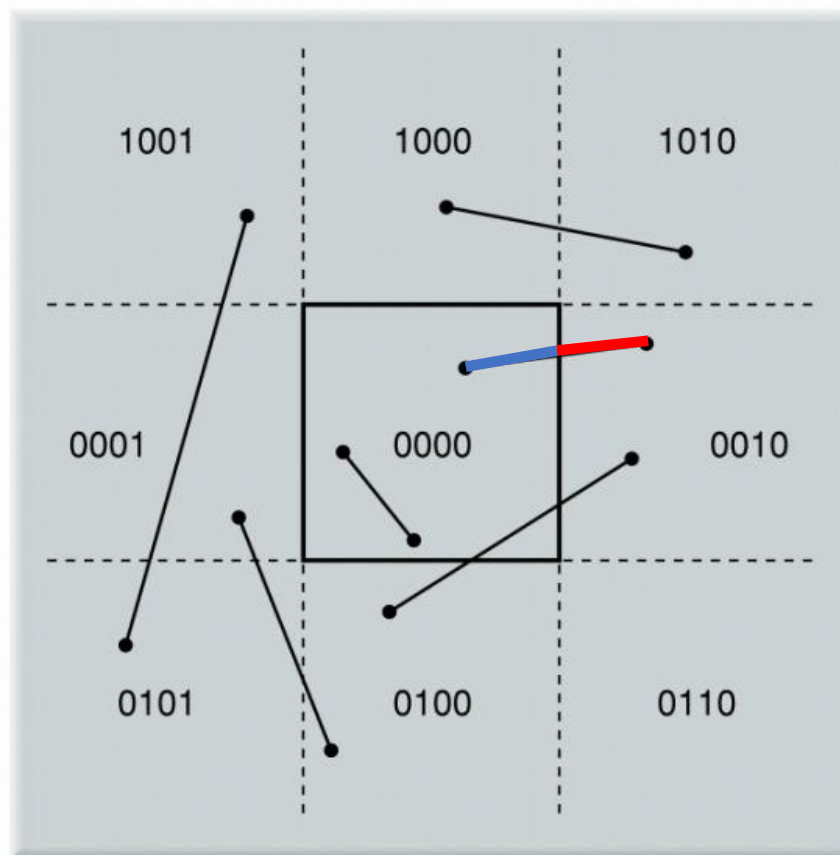
「コンピュータグラフィックス」2004年 / 財団法人画像情報教育振興協会 (CG-ARTS協会)

2次元クリッピング

■線分の可視判定手順

- 1. 両端の論理積が1
⇒表示されない
- 2. 両端のbitが0000
⇒表示される
- 3. どちらでもない
⇒はみ出している部分を削除

■図2.46——2次元クリッピングのための4ビットコード



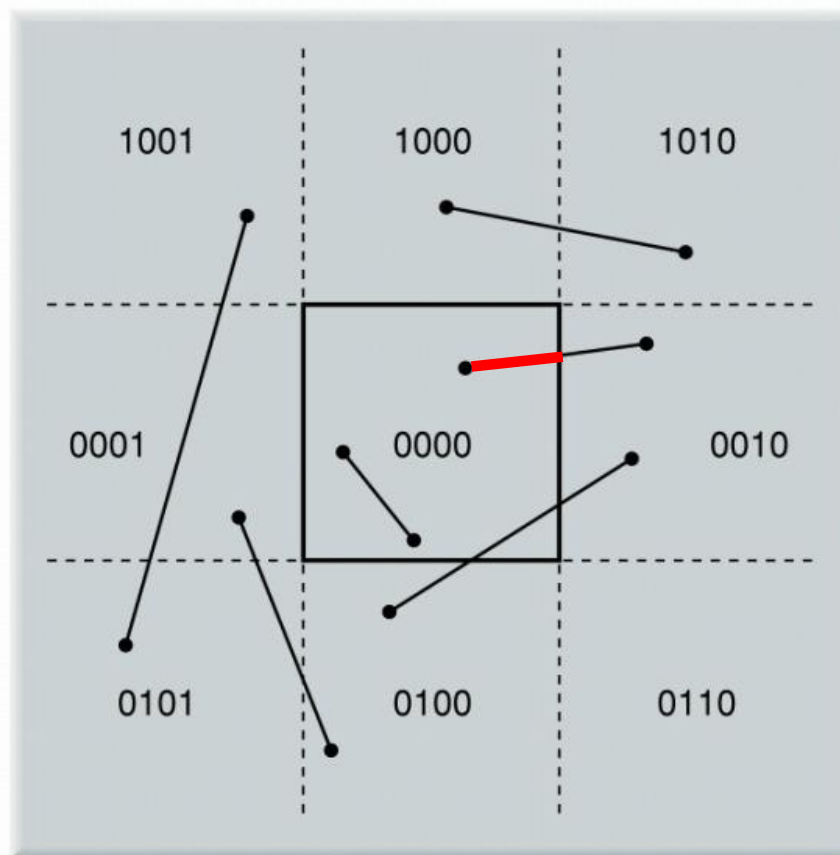
「コンピュータグラフィックス」2004年 / 財団法人画像情報教育振興協会 (CG-ARTS協会)

2次元クリッピング

■線分の可視判定手順

- 1. 両端の論理積が1
⇒表示されない
- 2. 両端のbitが0000
⇒表示される
- 3. どちらでもない
⇒はみ出している部分を削除
- 4. 残りの線分で
1からやり直す

■図2.46——2次元クリッピングのための4ビットコード



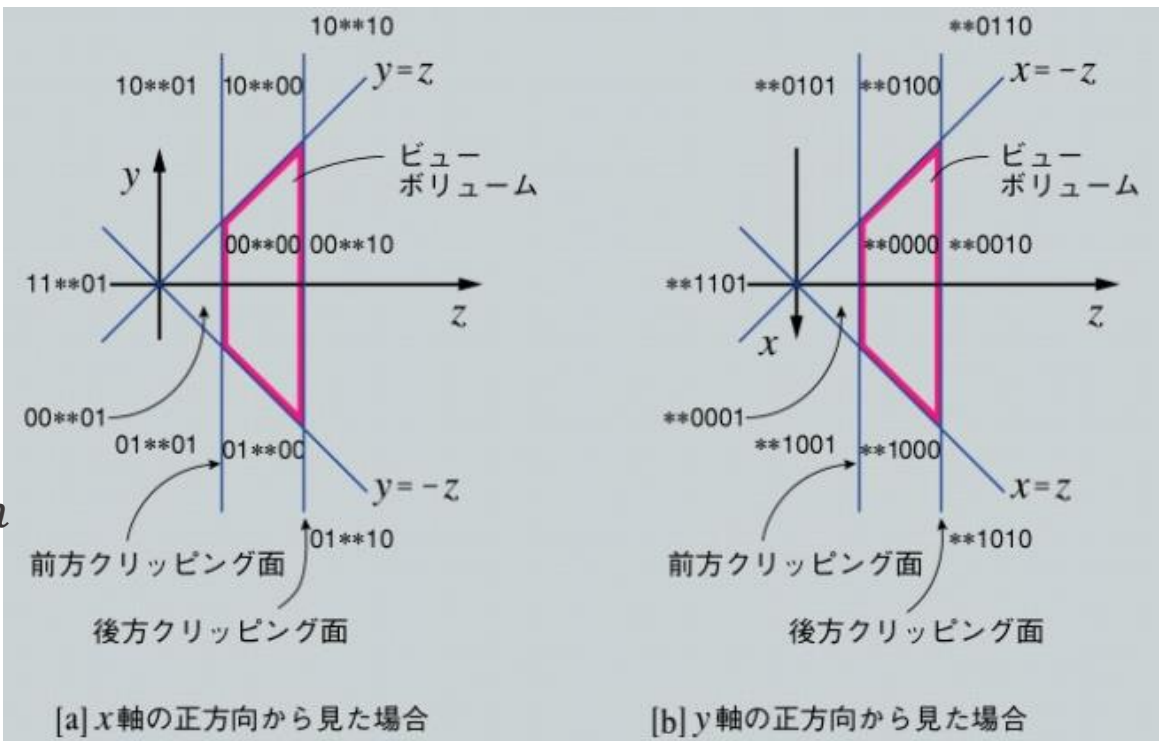
「コンピュータグラフィックス」2004年 / 財団法人画像情報教育振興協会 (CG-ARTS協会)

3次元クリッピング

■ 2次元クリッピングを3次元へ拡張

- 4bit⇒6bit

- 第1bit : $y > z$
- 第2bit : $y < -z$
- 第3bit : $x > z$
- 第4bit : $x < -z$
- 第5bit : $z > 1$
- 第6bit : $z < \tilde{z}_{min}$



CGでの投影(応用)

■ 投影による遠近感の強調

- 望遠：顔の見栄えは良いが迫力にかける
- 広角：迫力はあるが顔が崩れる

© サンジゲン

<http://cgworld.jp/regular/pencil+3-vol4.html>

望遠

広角

CGでの投影(応用)

■ 投影による遠近感の強調

- 望遠部分と広角部分を混ぜる
 - 望遠：キャラの顔, 身体部分
 - 広角：広げている腕の部分

© サンジゲン

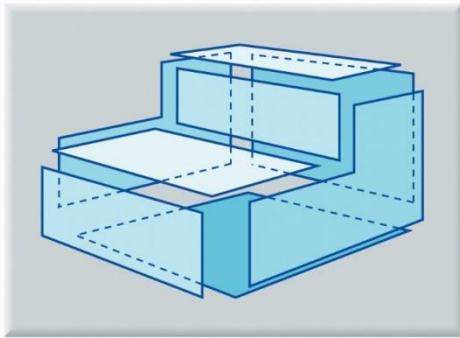
<http://cgworld.jp/regular/pencil+3-vol4.html>

望遠+広角による補正

次回

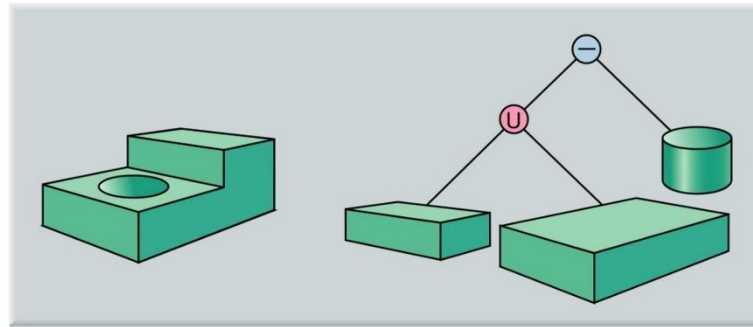
■モデリング技法1 ～3次元形状表現～

■図3.3—サーフェスモデルの概念図(実際には面どうしは接続しているが、内部が空洞であることを示すために離して描いてある)



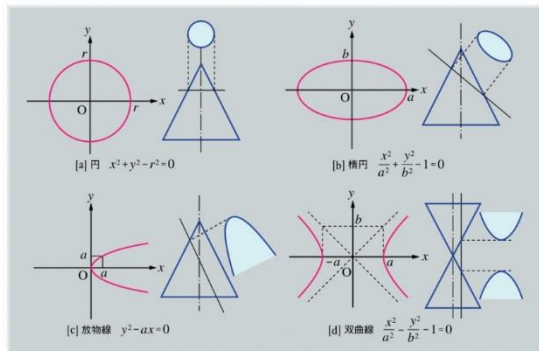
「コンピュータグラフィックス」2004年 / 財団法人画像情報教育振興協会 (CG-ARTS協会)

■図3.7—CSG による表現



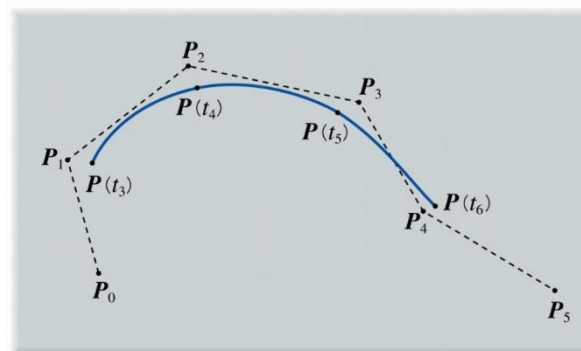
「コンピュータグラフィックス」2004年 / 財団法人画像情報教育振興協会 (CG-ARTS協会)

■図3.20—円錐の断面と2次曲線



「コンピュータグラフィックス」2004年 / 財団法人画像情報教育振興協会 (CG-ARTS協会)

■図3.27—様3次Bスプライン曲線



「コンピュータグラフィックス」2004年 / 財団法人画像情報教育振興協会 (CG-ARTS協会)