コンピュータグラフィックス

第4回

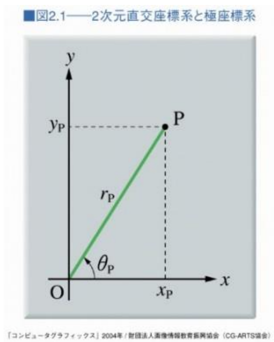
CG のための数学的基礎１

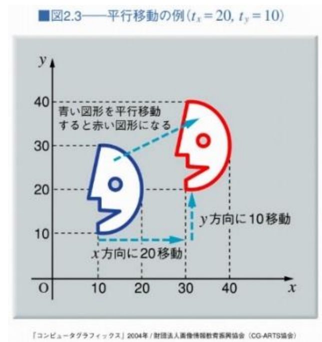
～２次元，３次元座標系～

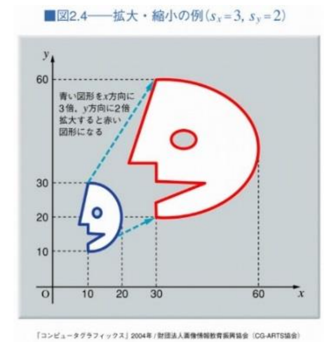
理工学部　兼任講師
藤堂 英樹

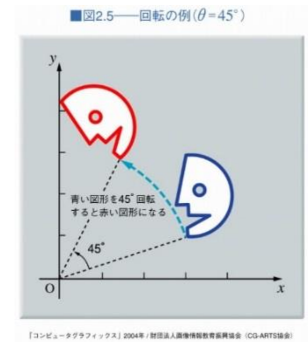
本日の講義内容

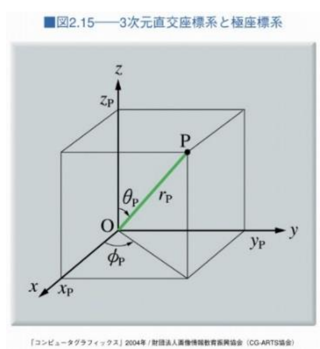
- CG のための数学的基礎 1
  - 2 次元座標系
  - 3 次元座標系

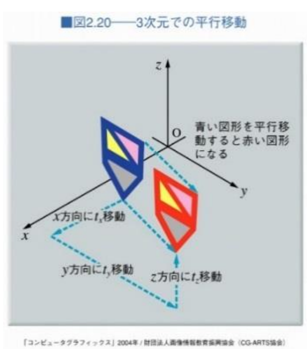


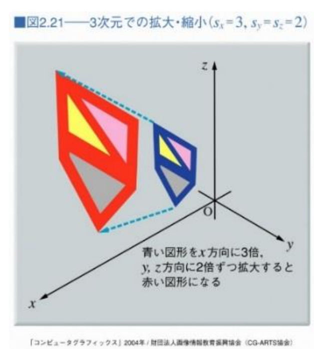


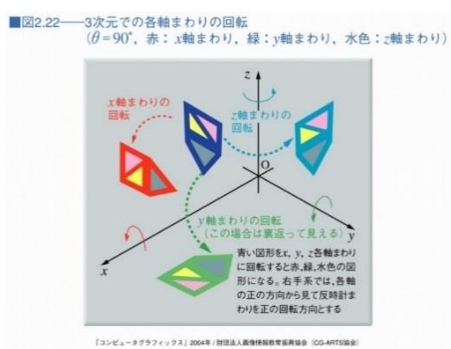






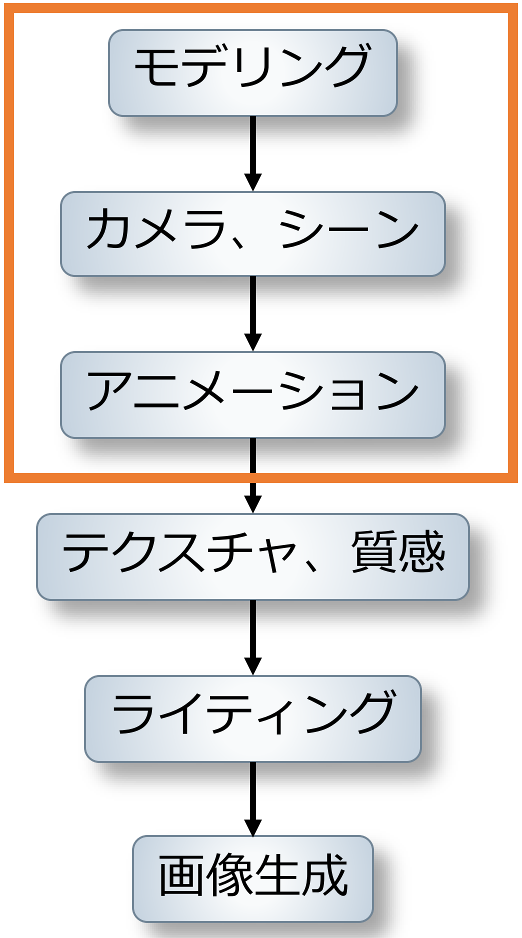






CG制作の主なワークフロー

- 3DCGソフトウェアの場合



座標変換の用途

- キャラクターの配置
  - 位置，大きさの調整
- キャラクターのポージング
  - 各関節角度の設定
- カメラの設定
  - 視点変更，ズームアップ

少しやってみましょう!

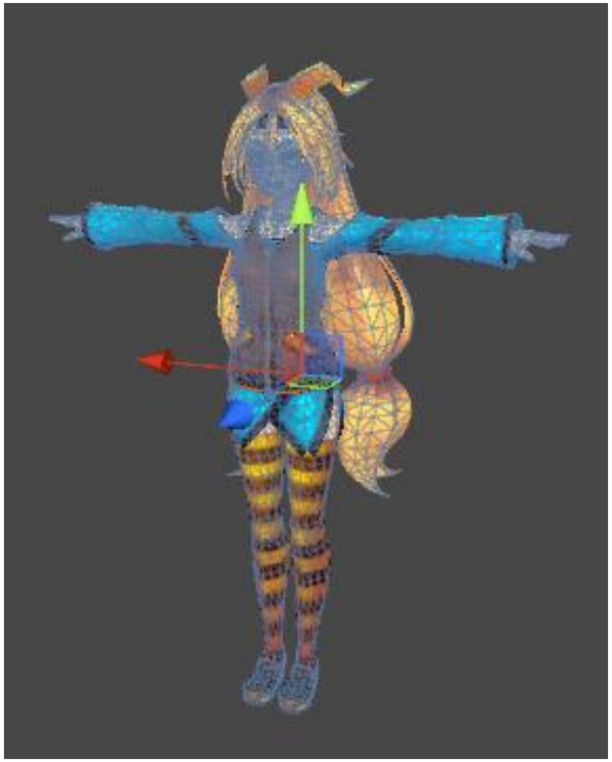
今回使用するソフトウェア

- Unity: Game Engine
  - 無料バージョンがある
  - アセット(データ等のリソース)が豊富

- Unityちゃん: Unity用データ
  - 無料で使える
  - ２次創作が可能

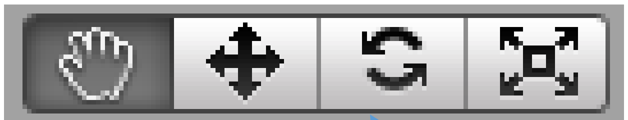
基本的な操作

- 動かしたい物を選択する



基本的な操作

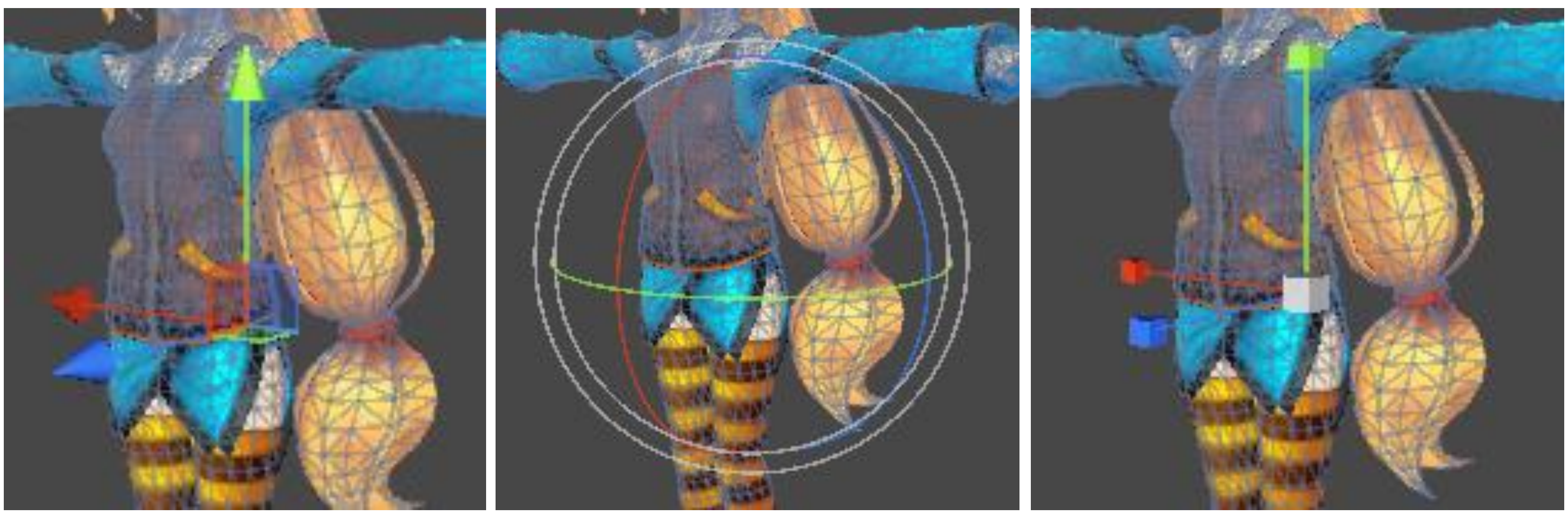
- 編集モードの切り替え



移動
(wキー)

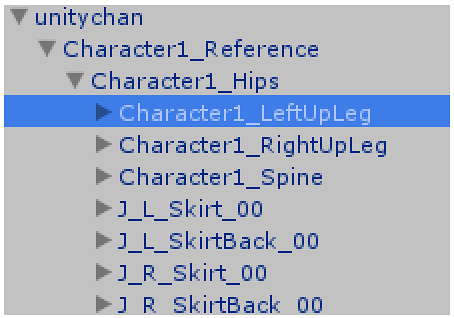
回転
(eキー)

拡大・縮小
(rキー)



より細かいポーズの調整

- 動かしたい場所を選択する
  ⇒回転操作でポーズを調整する

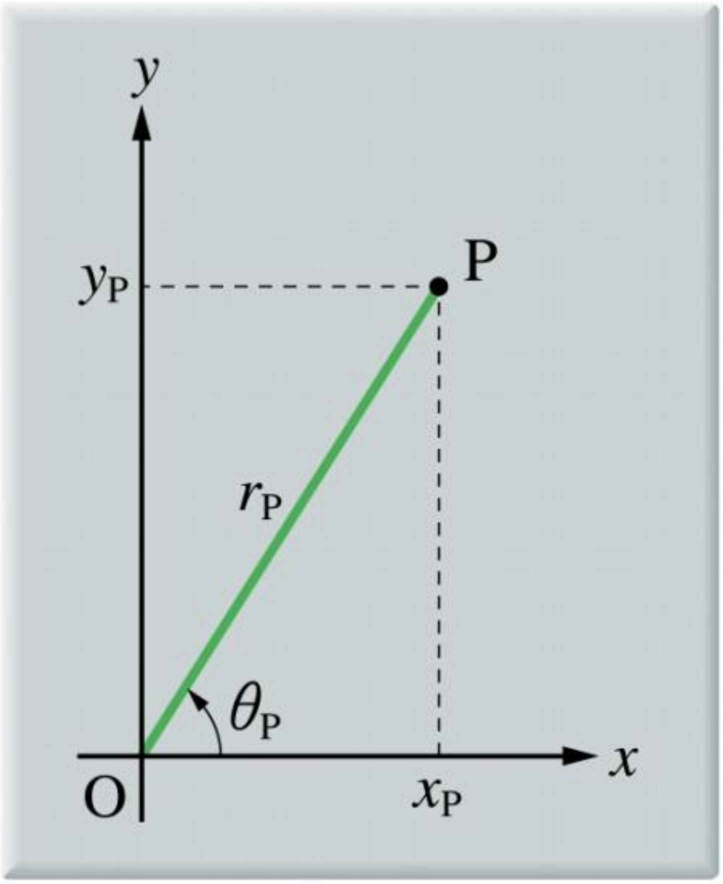


ヒエラルキーによる選択
・モデル同士の親子関係
・各関節を選択可能

2次元直交座標系と極座標系

- 2次元直交座標系
  - x軸とy軸による表現
  - $\mathrm{P} = (x_\mathrm{P}, y_\mathrm{P})$
- 極座標系
  - 距離と角度による表現
  - $P = (r_\mathrm{P}, \theta_\mathrm{P})$
- 対応関係
  - $x_\mathrm{P} = r_\mathrm{P} \cos \theta_\mathrm{P}$
  - $y_\mathrm{P} = r_\mathrm{P} \sin \theta_\mathrm{P}$

■図2.1——2次元直交座標系と極座標系



「コンピュータグラフィックス」2004年 / 財団法人画像情報教育振興協会（CG-ARTS協会）

2次元図形の基本変換

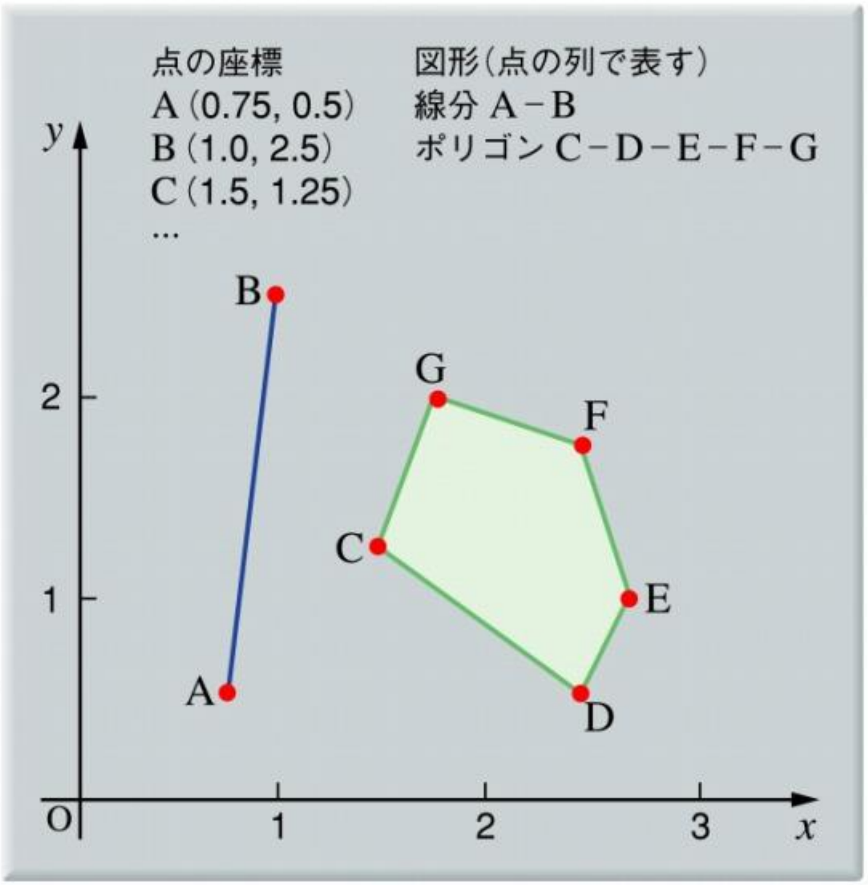
■図形の表現

- 座標と順序
- 例：線分，ポリゴン

■幾何学的変換

- 平行移動
- 拡大・縮小
- 回転

■図2.2――2次元図形の例

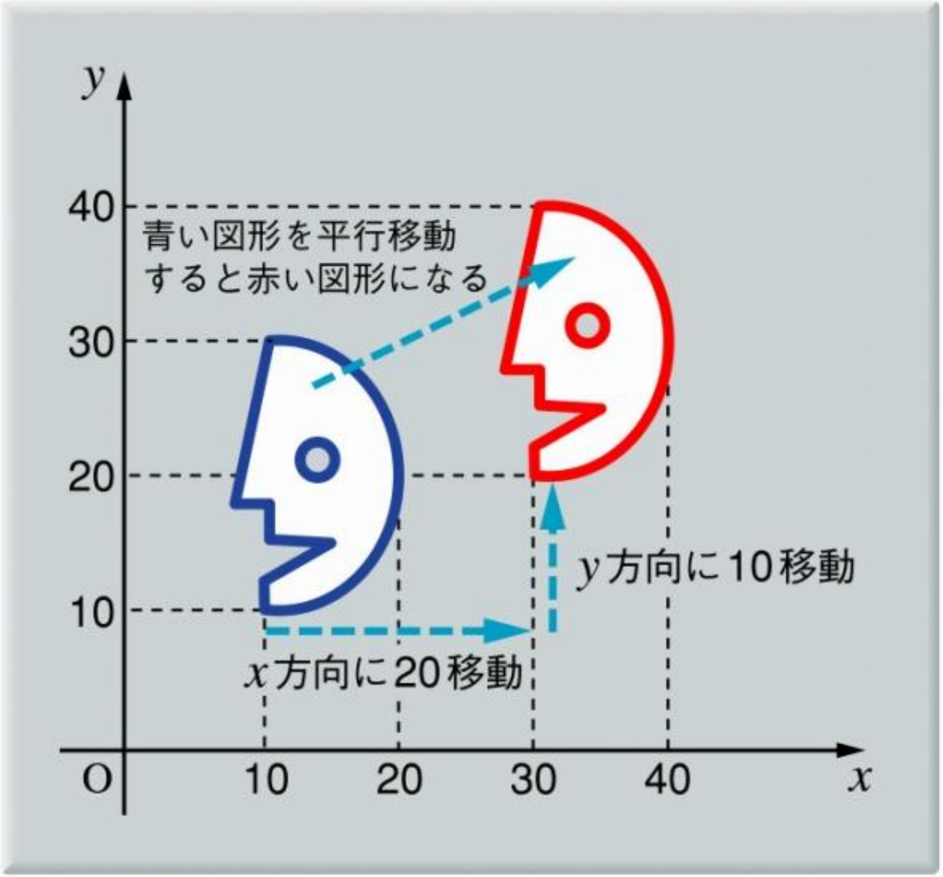


「コンピュータグラフィックス」2004年 / 財団法人画像情報教育振興協会（CG-ARTS協会）

平行移動

■x, y軸方向にt_x, t_y移動
- $x' = x + t_x$
- $y' = y + t_y$

■図2.3——平行移動の例（$t_x = 20,\ t_y = 10$）

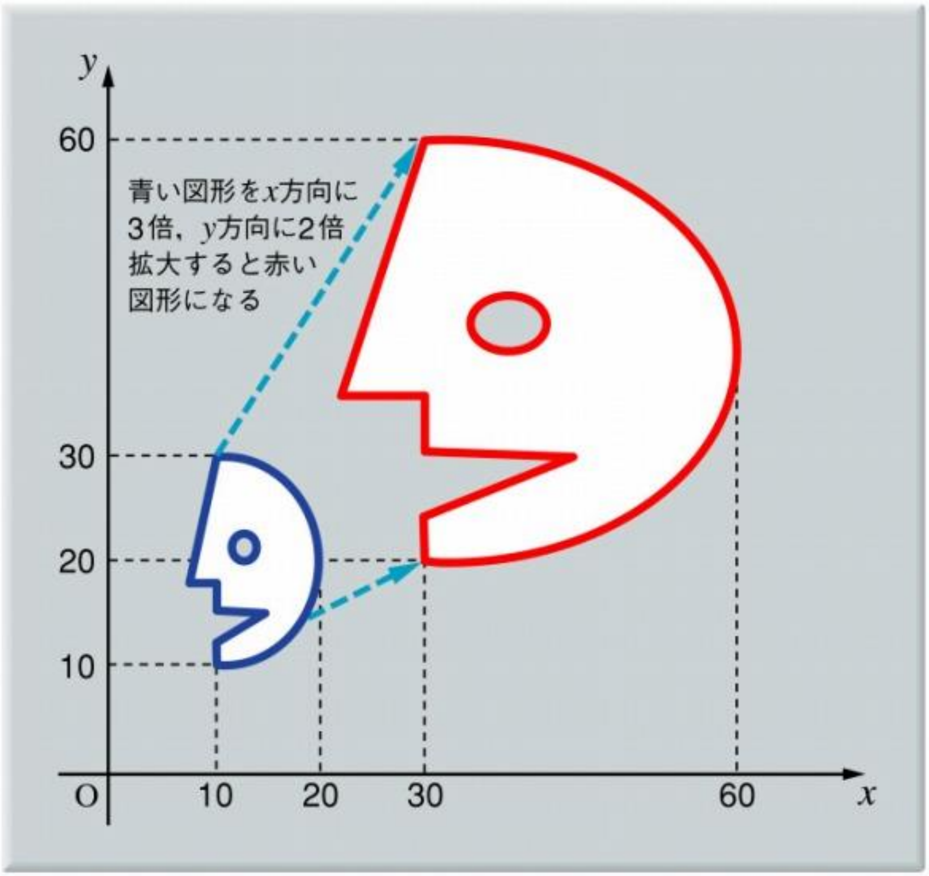


「コンピュータグラフィックス」2004年 / 財団法人画像情報教育振興協会（CG-ARTS協会）

拡大・縮小

- x, y軸方向にs_x, s_y倍
  - $x' = s_x x$
  - $y' = s_y y$

■図2.4——拡大・縮小の例（$s_x = 3,\ s_y = 2$）

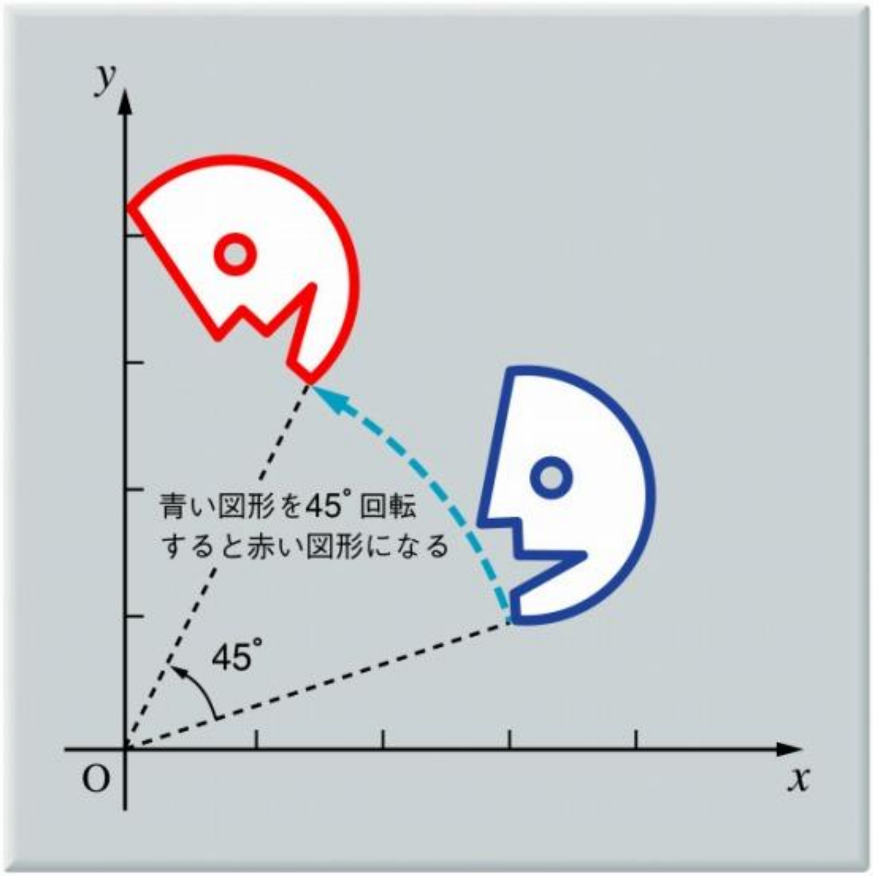


「コンピュータグラフィックス」2004年 / 財団法人画像情報教育振興協会（CG-ARTS協会）

回転

- 原点を中心に角度θ回転
  - $x' = x\cos\theta - y\sin\theta$
  - $y' = x\sin\theta + y\cos\theta$

■図2.5——回転の例（$\theta=45°$）



「コンピュータグラフィックス」2004年 / 財団法人画像情報教育振興協会（CG-ARTS協会）

同次座標

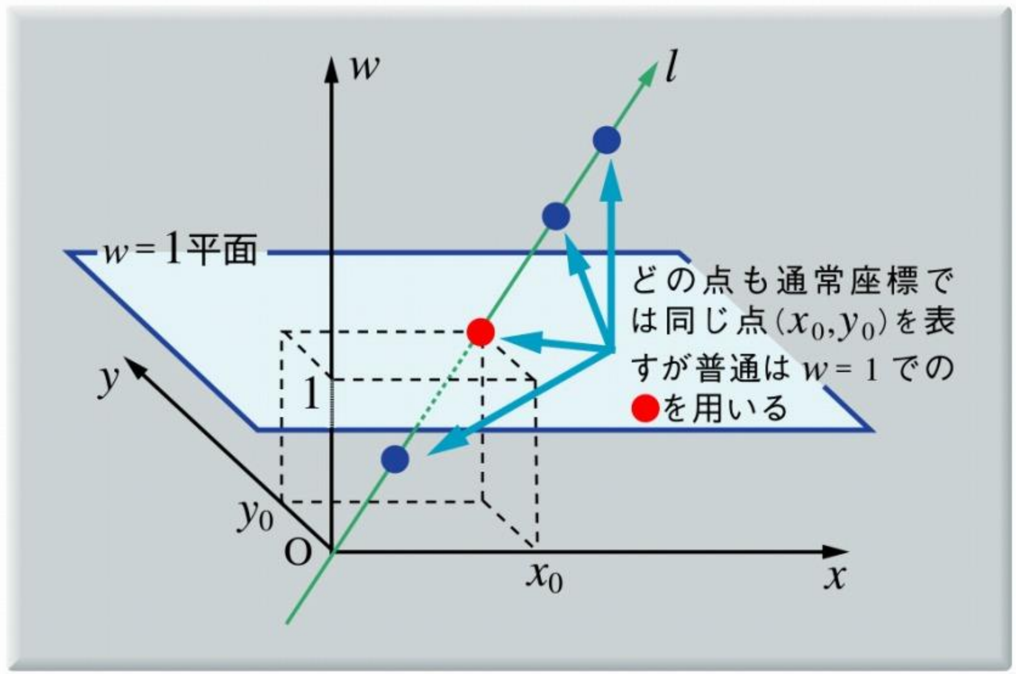
- ベクトルで座標を表した場合
  - 拡大・縮小：$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
  - 回転：$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
  - 平行移動：$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \end{pmatrix}$

平行移動だけベクトルの足し算

同次座標

- 同次座標
  - 実数wで座標を拡張
  - $(x, y) \Rightarrow (wx, wy, w)$
  - 例：
    - $(2,3,1) = (4,6,2)$
  - 通常は$(x, y, 1)$の形

■図 2.6――直線 l 上のすべての点が通常座標の同じ点 (x_0, y_0) を表す



「コンピュータグラフィックス」2004年 / 財団法人画像情報教育振興協会（CG-ARTS協会）

同次座標

■同次座標で表した場合

- 拡大・縮小：$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\boldsymbol{S}(s_x, s_y) \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}}$
- 回転：$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\boldsymbol{R}(\theta) \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}}$
- 平行移動：$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\boldsymbol{T}(t_x, t_y) \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}}$

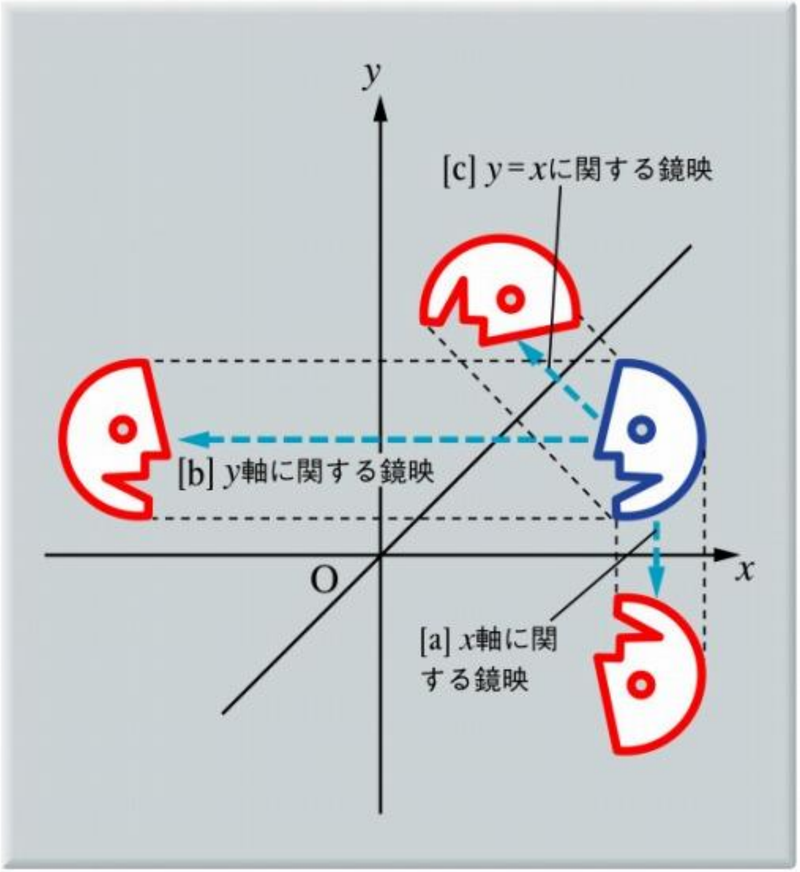
全て行列の積で表すことができる

鏡映変換

■表2.1——鏡映における変換式

鏡映の種類	（同次座標による）変換式	図
x軸に関する鏡映	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$	図2.8 [a]
y軸に関する鏡映	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$	図2.8 [b]
直線$y=x$に関する鏡映	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$	図2.8 [c]

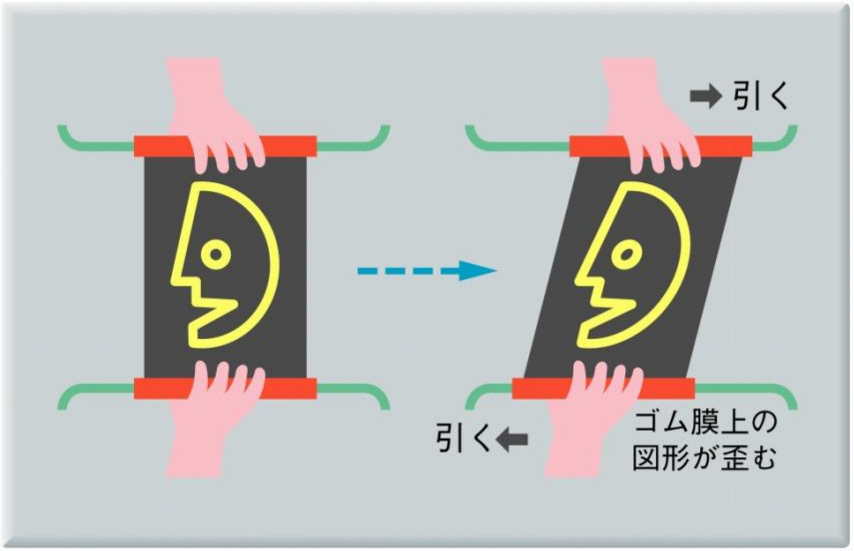
■図2.8——鏡映の例



スキュー（せん断）

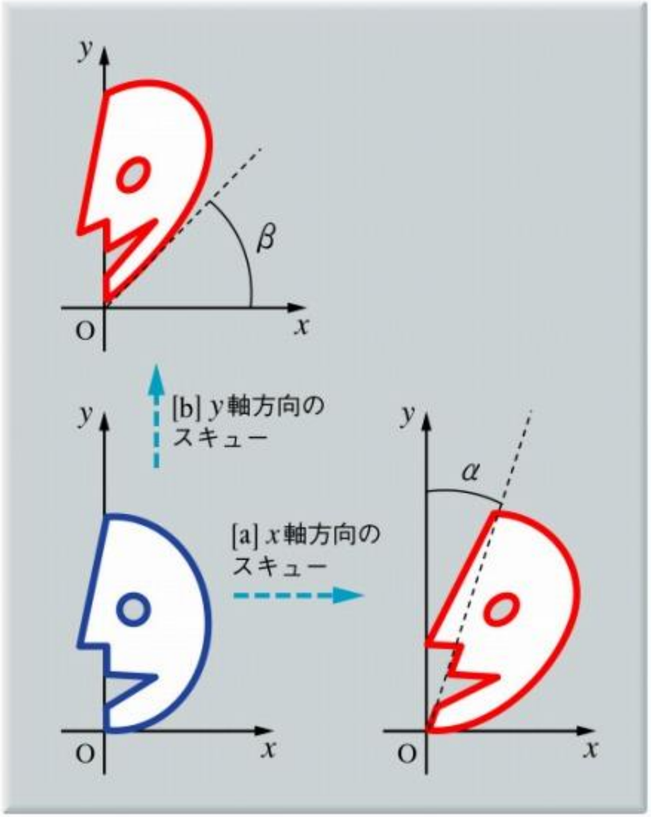
- 長方形⇒平行四辺形の歪み

■図2.9——ゴム膜でのスキューの原理



「コンピュータグラフィックス」2004年 / 財団法人画像情報教育振興協会（CG-ARTS協会）

■図2.10——スキューの例



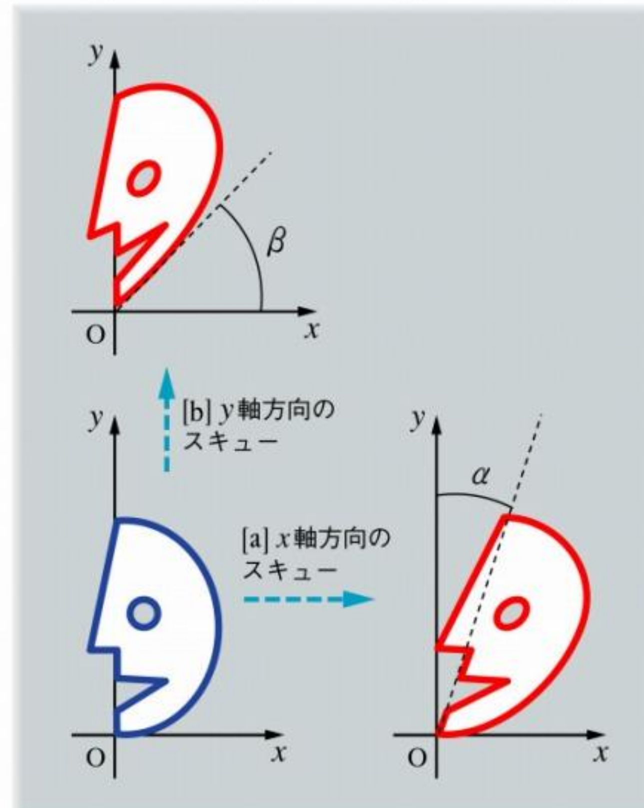
「コンピュータグラフィックス」2004年 / 財団法人画像情報教育振興協会（CG-ARTS協会）

スキュー（せん断）

- 長方形⇒平行四辺形の歪み

スキューの種類	(同次座標による)変換式
x軸方向のスキュー	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$
y軸方向のスキュー	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$

■図2.10——スキューの例



「コンピュータグラフィックス」2004年 / 財団法人画像情報教育振興協会（CG-ARTS協会）

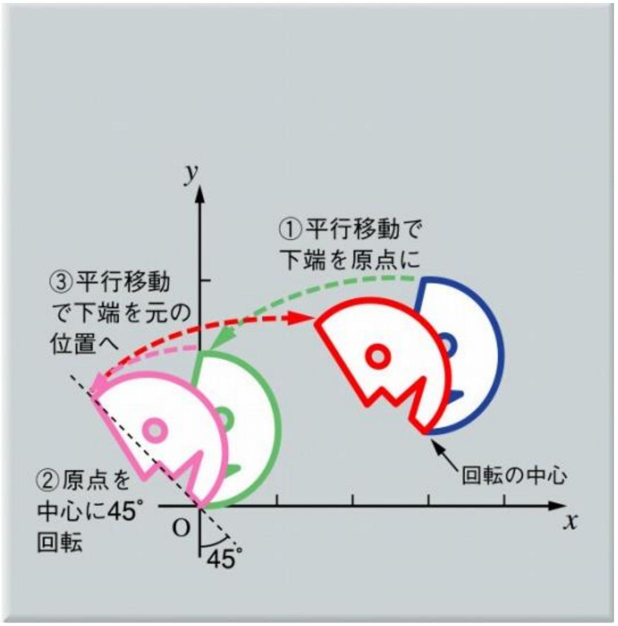
合成変換

- 点：$\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$
- 変換の列：$\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{A}_3$
- 合成変換： $\boldsymbol{p}' = \left(\boldsymbol{A}_3\left(\boldsymbol{A}_2(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{p})\right)\right)$
- $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_3\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_1$とすると$\boldsymbol{p}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}$

合成変換

■具体例

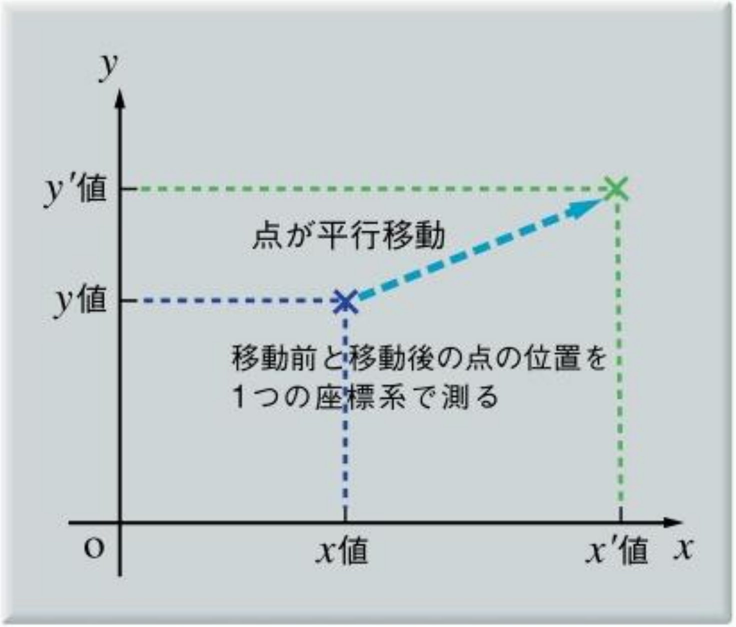
- 平行移動$\boldsymbol{T}(-x_0,-y_0)$⇒回転$\boldsymbol{R}(\theta)$ ⇒平行移動$\boldsymbol{T}(x_0,y_0)$
- $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{T}(x_0,y_0)\boldsymbol{R}(\theta)\boldsymbol{T}(-x_0,-y_0)\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$



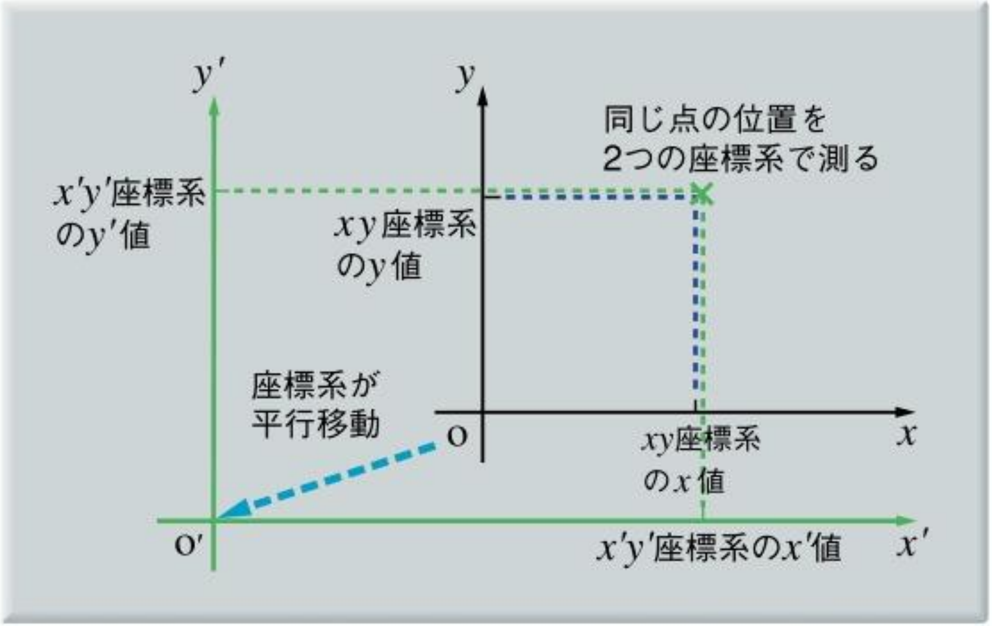
2次元アフィン変換

■平行移動$\boldsymbol{T}(x, y)$の解釈

■図2.13——平行移動の2つの解釈



[a] 1つの座標系における移動前の点の位置と移動後の位置との関係



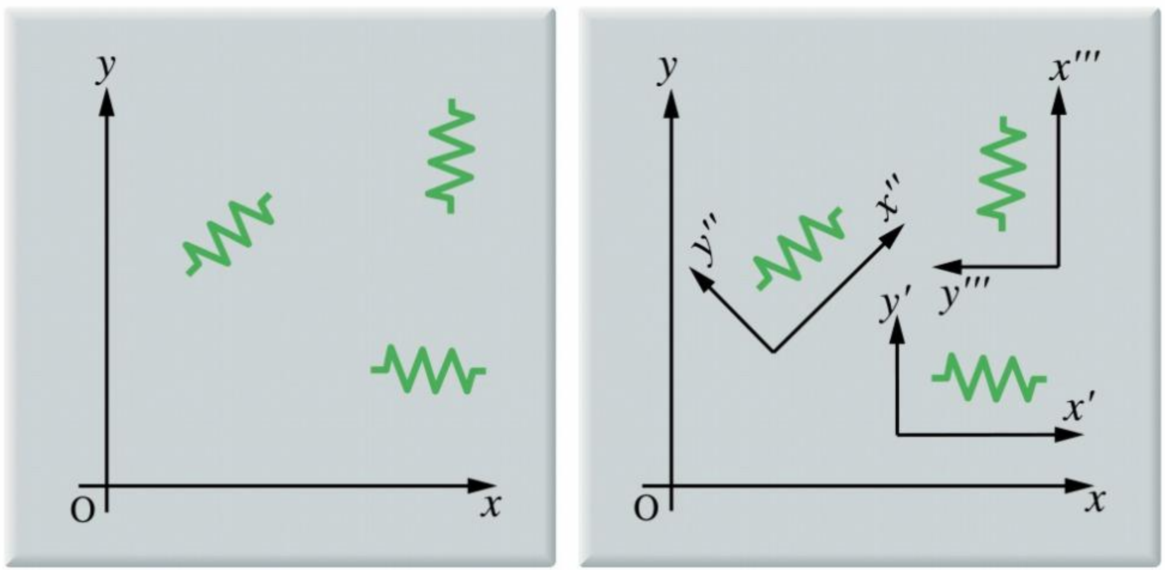
[b] 1つの点に対するxy座標系での位置とx′y′座標系での位置の関係

「コンピュータグラフィックス」2004年 / 財団法人画像情報教育振興協会（CG-ARTS協会）

2次元アフィン変換

- 座標系を動かす解釈
  - 同じ図形をたくさん描く場合に有利

■図2.14——同じ図形を異なる位置や向きに描く場合



[a] 別々に座標値を指定しなければならない場合

[b] 別々の座標系を用いて，同じ座標値で表せる場合

「コンピュータグラフィックス」2004年 / 財団法人画像情報教育振興協会（CG-ARTS協会）

2次元アフィン変換

■幾何学変換の一般的な行列表現

- $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

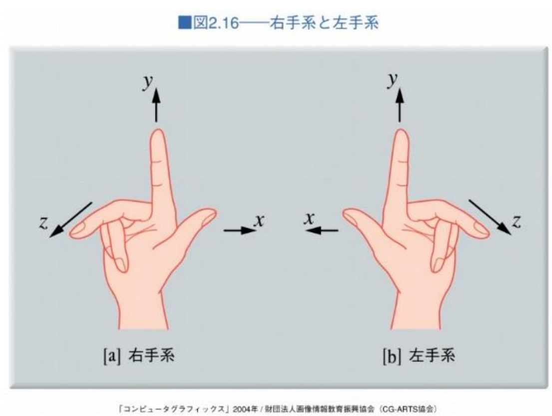
- □: 拡大・縮小，回転，スキュー
- □: 平行移動

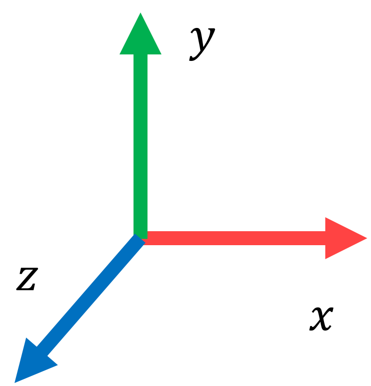
■種類

- 剛体変換：形が変わらないアフィン変換
  - 平行移動，回転

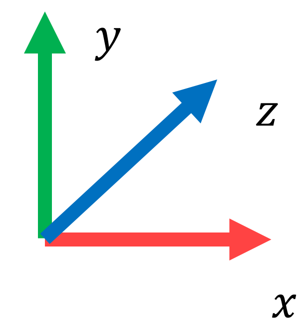
3次元座標系

- 直交座標系
  - 右手系
    - zが手前を向いている
    - 映像制作系で一般的
  - 左手系
    - zが奥を向いている
    - ゲーム制作系で一般的





OpenGL, Maya等

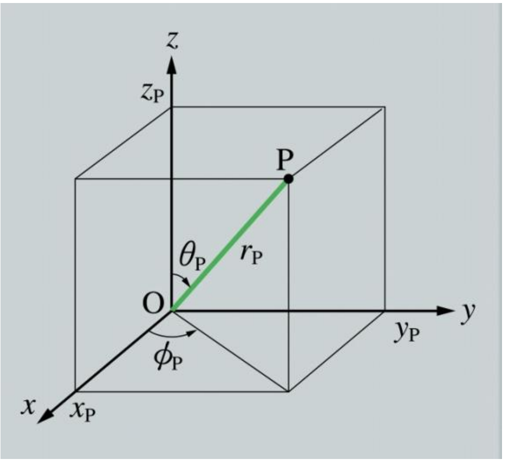


DirectX, Unity等

3次元座標系

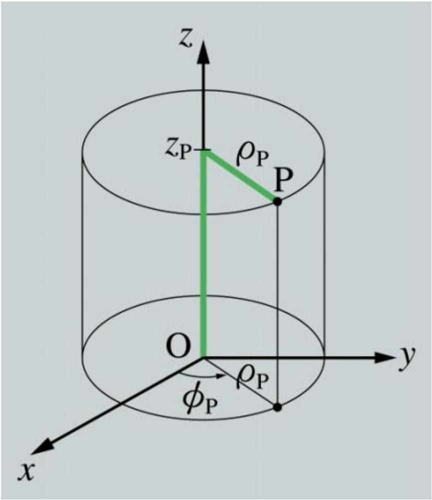
■極座標

- $x_P = r_P \sin\theta_P \cos\phi_P$
- $y_P = r_P \sin\theta_P \sin\phi_P$
- $z_P = r_P \cos\theta_P$



■円柱座標

- $x_P = \rho_P \cos\phi_P$
- $y_P = \rho \sin\phi_P$
- $z_P = z_P$

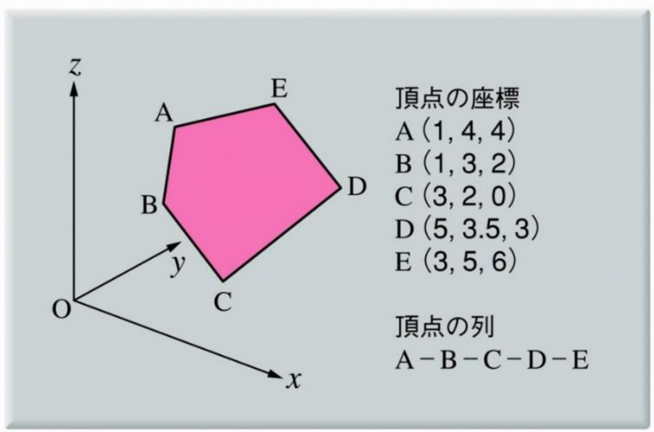


簡単なモデリング

- ■モデリング
  - ３次元図形の形状をデザイン
  - 形状モデル：形状データ

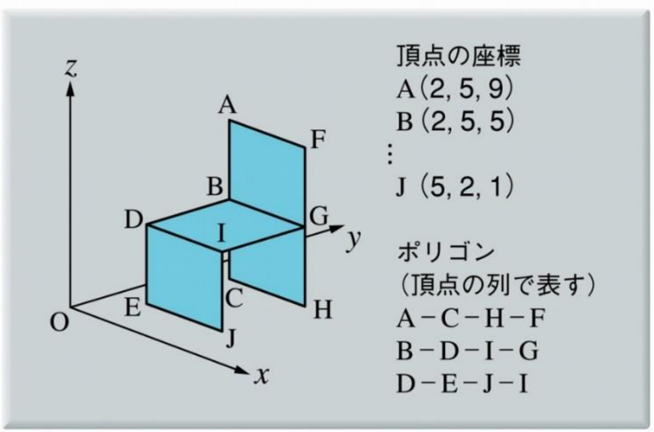
- ■ポリゴン
  - 頂点座標
  - 順序

■図2.18――頂点5個のポリゴンの例



「コンピュータグラフィックス」2004年 / 財団法人画像情報教育振興協会（CG-ARTS協会）

■図2.19――ポリゴンによる形状モデル



「コンピュータグラフィックス」2004年 / 財団法人画像情報教育振興協会（CG-ARTS協会）

3次元の同次座標

- 2次元
  - $(x, y) \Rightarrow (wx, wy, w) = (x, y, 1)$
- 3次元
  - zの成分が増えるだけ
  - $(x, y, z) \Rightarrow (wx, wy, wz, w) = (x, y, z, 1)$
  - 2次元の場合と同様に平行移動等の変換を定義できる

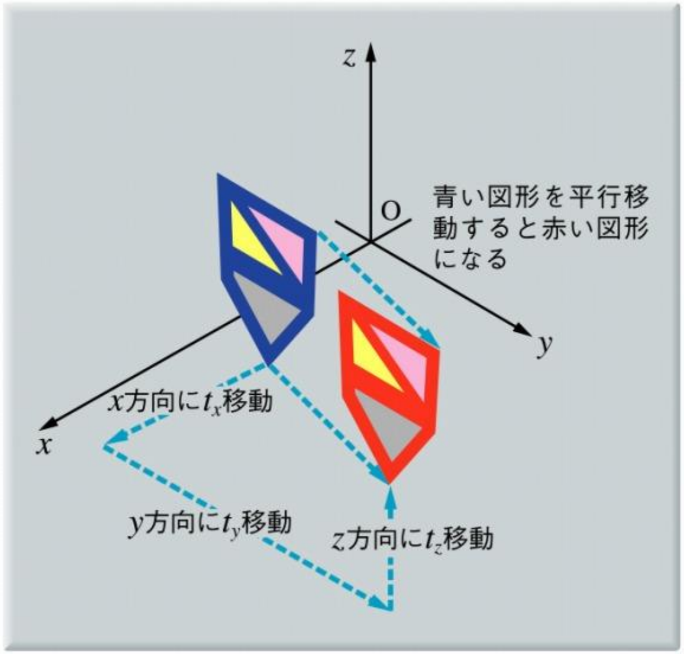
平行移動

- x, y, z軸方向にt_x, t_y, t_z移動

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \boldsymbol{T}(t_x, t_y, t_z) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

■図2.20——3次元での平行移動

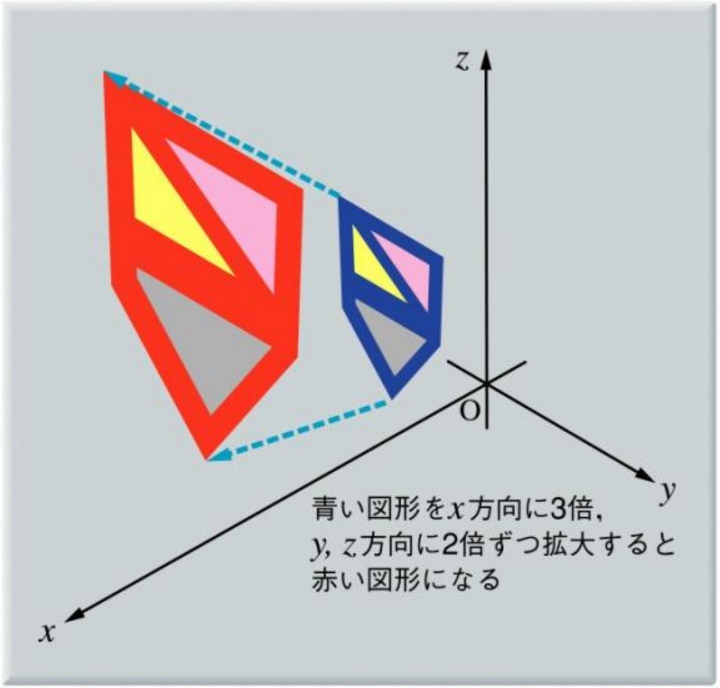


「コンピュータグラフィックス」2004年 / 財団法人画像情報教育振興協会（CG-ARTS協会）

拡大・縮小

- x, y, z軸方向にs_x, s_y, s_z倍
  - $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$
    $$= \boldsymbol{S}(s_x, s_y, s_z) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

■図2.21——3次元での拡大・縮小($s_x = 3$, $s_y = s_z = 2$)

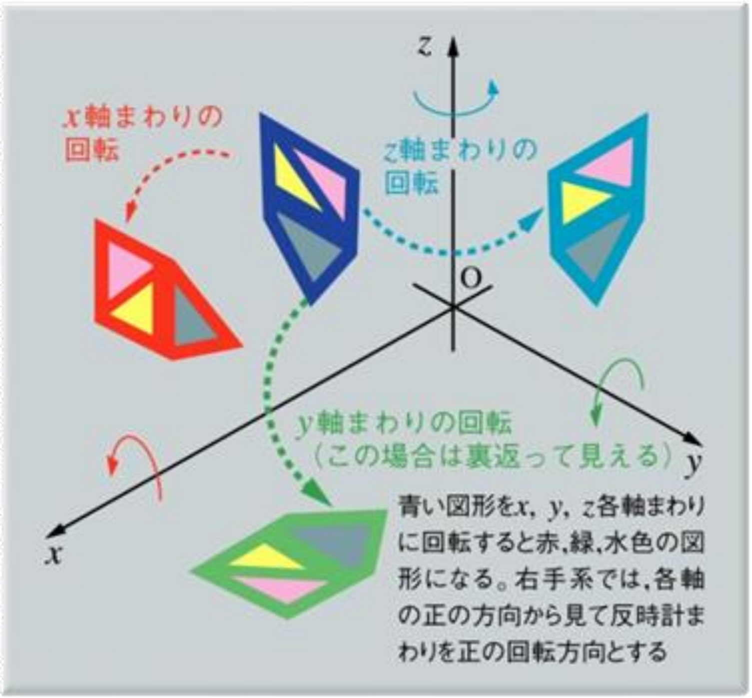


「コンピュータグラフィックス」2004年 / 財団法人画像情報教育振興協会（CG-ARTS協会）

回転

- 各軸周りの回転
  - z 軸はまわりは
    ２次元の場合と同じ

■図2.22——3次元での各軸まわりの回転
（$\theta=90°$，赤：x軸まわり，緑：y軸まわり，水色：z軸まわり）



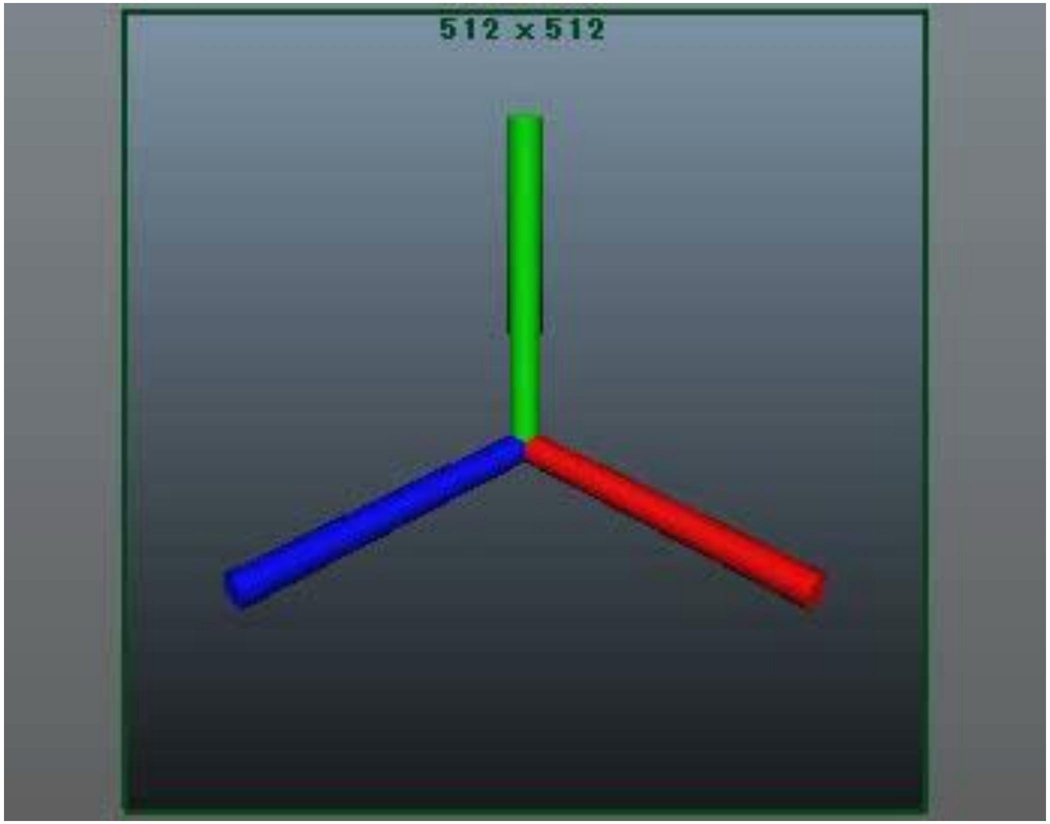
「コンピュータグラフィックス」2004年 / 財団法人画像情報教育振興協会（CG-ARTS協会）

回転

- x 軸まわりの回転
  - $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{R}_x(\theta) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$
- y 軸まわりの回転
  - $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{R}_y(\theta) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$
- z 軸まわりの回転
  - $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{R}_z(\theta) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

回転

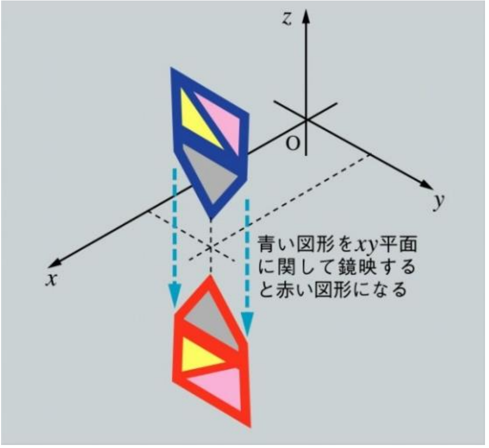
- オイラー角
  - CGソフトウェアで一般的な手法
  - 1. x軸周りにα
  - 2. y軸周りにβ
  - 3. z軸周りγ
  - 順番に回転する



鏡映とスキュー（せん断）

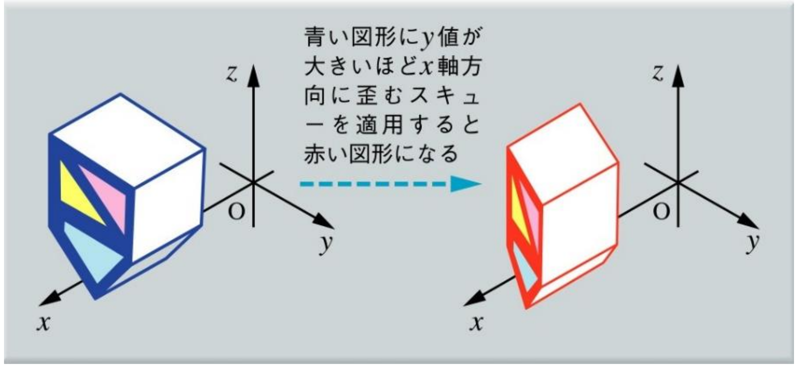
■xy 平面に関する鏡映

- $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$



■y 値が大きいほどx 軸方向に歪むスキュー

- $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$



3次元アフィン変換

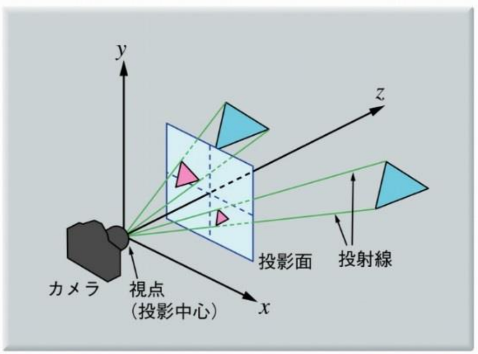
- 幾何学変換の一般的な行列表現
  - $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$
  - $\square$: 拡大・縮小，回転，スキュー
  - $\square$: 平行移動

- 種類
  - 剛体変換：形が変わらないアフィン変換
    - 平行移動，回転

次回

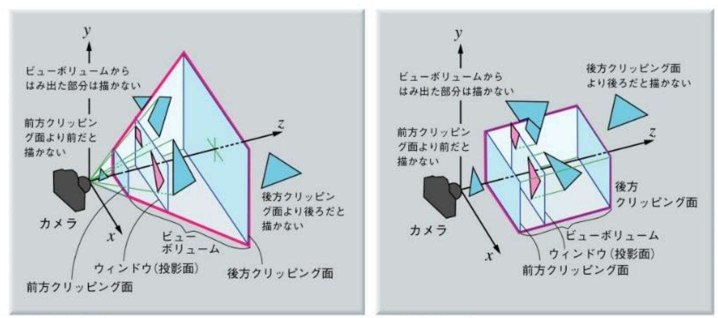
- CG のための数学的基礎 2
  ～投影変換～

■図2.27——透視投影の原理



「コンピュータグラフィックス」2004年 / 財団法人画像情報教育振興協会（CG-ARTS協会）

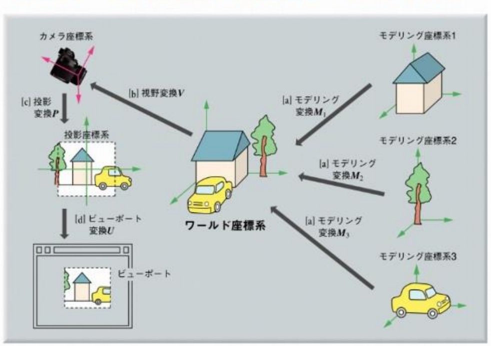
■図2.31——ビューボリュームとクリッピング



[a] 透視投影の場合　[b] 平行投影の場合

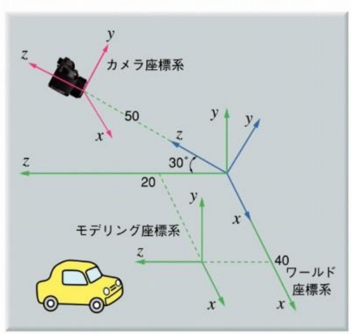
「コンピュータグラフィックス」2004年 / 財団法人画像情報教育振興協会（CG-ARTS協会）

■図2.43——モデルから表示までの変換（ビューイングパイプライン）



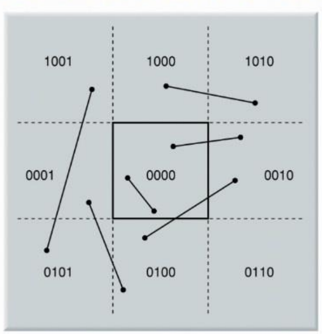
「コンピュータグラフィックス」2004年 / 財団法人画像情報教育振興協会（CG-ARTS協会）

■図2.45——モデリング変換と視野変換の例



「コンピュータグラフィックス」2004年 / 財団法人画像情報教育振興協会（CG-ARTS協会）

■図2.46——2次元クリッピングのための4ビットコード



「コンピュータグラフィックス」2004年 / 財団法人画像情報教育振興協会（CG-ARTS協会）